

INDICE DEI CONTENUTI

- **Sistemi di riferimento ortogonali**
 - Coordinate cartesiane
 - Coordinate sferiche
 - Coordinate cilindriche
- **Operatori differenziali**
 - Divergenza di una funzione vettoriale
 - Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)
 - Divergenza in coordinate cartesiane
 - Rotore di una funzione vettoriale
 - Teorema della circuitazione (o di Stokes)
 - Rotore in coordinate cartesiane
 - Gradiente
 - Laplaciano
 - Operatori differenziali in sintesi
- **Campi elettrostatici di alcune distribuzioni continue di carica**
 - Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico, nei punti del suo asse –
 - Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, a forma di arco di – circonferenza, nel suo centro
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico –
 - Campo elettrostatico generato da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse (I – II metodo)
 - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico (I-II metodo) –
 - Campo elettrostatico generato da due piani carichi uniformemente, indefiniti e paralleli –
 - Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma – di arco di circonferenza nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo tangente ad essa (arco lineare)
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico ~~NO~~
- **Teorema di Gauss**
 - Premessa (1): flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso – due superfici che sottengono a un angolo solido
 - Premessa (2): flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie sferica, con il campo – generato da una carica posta al centro della sfera
 - Dimostrazione del teorema di Gauss –
 - Enunciato del teorema di Gauss –
 - Teorema di Gauss in forma differenziale (o locale) –
- **Applicazioni del teorema di Gauss per il calcolo dell'espressione del campo elettrostatico generato da alcune distribuzioni continue di carica**
 - Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico
 - Campo elettrostatico generato da un piano indefinito, uniformemente carico
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita in una sfera
 - Campo elettrostatico generato da una carica Q distribuita in una sfera con densità volumica variabile, funzione del punto

- Distribuzione della carica su un conduttore isolato -
- Campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un conduttore isolato, carico: teorema di Coulomb -
- Conservatività del campo elettrostatico -
- Linee di forza del campo elettrostatico -
- Schermo elettrostatico
- Potenziale elettrostatico -
 - Premessa matematica: descrizione di campi scalari e vettoriali -
 - Derivata direzionale -
 - Ripasso su operatori differenziali -
 - Forze conservative ed energia potenziale -
 - Campi conservativi e funzioni potenziali -
 - Definizione di potenziale elettrostatico -
 - Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di carica generica (lineare, superficiale, volumica) -
- Calcolo di potenziali
 - Regola generale per il calcolo di potenziali -
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme -
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica
 - Potenziale elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita in una sfera -
 - Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico -
- La superficie di un conduttore è equipotenziale -
- Energia elettrostatica
 - Energia elettrostatica di due cariche puntiformi
 - Energia elettrostatica di N cariche puntiformi
 - Espressione dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico
- Dipolo elettrico
 - Definizione di dipolo elettrico e di momenti di dipolo elettrico
 - Campo elettrostatico in prossimità di un dipolo elettrico
 - Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse
 - Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento della forza relativo ad un dipolo
- Condensatori
 - Definizione di condensatore e di capacità
 - Energia elettrostatica di un condensatore
- Analisi di alcune tipologie di condensatori comunemente diffusi
 - Condensatore piano: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
 - Condensatore sferico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
 - Condensatore cilindrico: differenza di potenziale, capacità, energia elettrostatica
- Correnti
 - Definizione di corrente elettrica -
 - Calcolo della velocità di una corrente *no*
 - Densità di corrente -

- Equazione di continuità –
- Leggi di Ohm (I-II) –
- Effetto Joule –
- ❖ **Campo di induzione magnetica**
 - Introduzione al campo magnetico e forza di Lorentz
 - Azione del campo di induzione magnetica su una carica q in esso iniettata
- ❖ **I formula di Laplace ed applicazioni**
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo a forma di arco di circonferenza, percorso da corrente, nel suo centro
 - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nel suo centro
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, percorso da corrente
 - Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsa da corrente, nei punti del suo asse
 - Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, percorso da corrente: legge di Biot-Savart
- ❖ **Notazioni su campi centrali e azimutali**
- ❖ **II formula di Laplace ed applicazioni**
 - Momento di dipolo di associato ad una spira percorsa da corrente
 - Momento torcente di una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico
 - Forza agente su un tratto di filo, percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme
 - Forza agente su un filo chiuso, percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme
 - Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, percorsi da corrente
- ❖ **Teorema di Ampere**
 - Premessa matematica: circuitazione di un campo scalare lungo una linea –
 - Teorema di Ampere in forma integrale –
 - Teorema di Ampere in forma differenziale –
- ❖ **Il solenoide**
 - Calcolo del campo magnetico all'interno di un solenoide percorso da corrente
- ❖ **Induzione elettromagnetica**
 - Legge dell'induzione elettromagnetica
 - Fenomeni di induzione elettromagnetica di I specie
 - Fenomeni di induzione elettromagnetica di II specie
 - Fenomeni di autoinduzione
 - Fenomeni di mutua induzione
- ❖ **Equazioni di Maxwell statiche con spiegazioni**
- ❖ **Equazioni del campo elettromagnetico**
 - Teorema della derivata temporale del flusso di un campo vettoriale
 - Campo elettromotore non irrotazionale (non conservativo)
 - Teorema di Ampere-Maxwell in forma differenziale
 - Teorema di Ampere-Maxwell in forma integrale: corrente di spostamento
 - Principali proprietà delle onde elettromagnetiche e vettore di Poynting

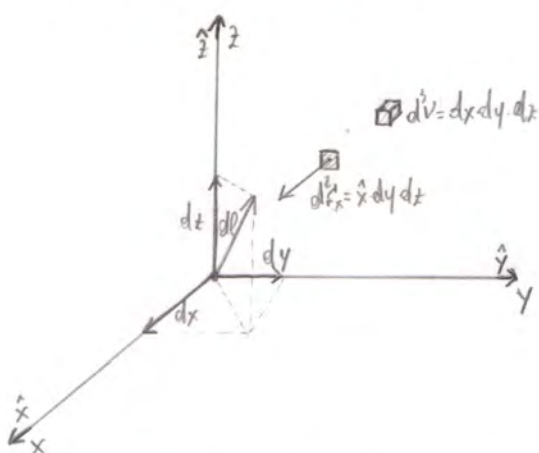
Un sistema di riferimento ortogonale le coordinate sono "perpendicolari" l'une all'altre. Sono stati ideati molti sistemi di riferimento ortogonali, ma quelli più usati sono:

- il sistema in coordinate cartesiane (anche dette rettangolari)
- il sistema in coordinate sferiche
- il sistema in coordinate cilindriche

Lo motivo serve di avere il bisogno di più di un sistema di riferimento è puramente analitico: le soluzioni di determinati problemi può essere molto facilitate scegliendo convenientemente il sistema di riferimento più adatto alle peculiarità del problema.

COORDINATE CARTESIANE

Il sistema in coordinate cartesiane è costituito da 3 assi ortogonali, orientati lungo le 3 direzioni x, y, z . Ciascun asse è associato un vettore di modulo unitario ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$):



La lunghezza differenziale in coordinate cartesiane è il vettore definito come: $dl = \hat{x} \cdot dx + \hat{y} \cdot dy + \hat{z} \cdot dz$ $\left| \begin{array}{l} dl_y = dy \\ dl_x = dx \\ dl_z = dz \end{array} \Rightarrow dl = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right.$

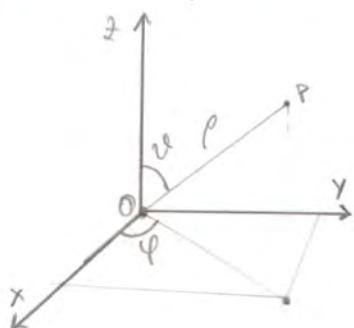
L'area differenziale d^2s è una grandezza vettoriale di modulo d'uguale al prodotto di due lunghezze differenziali, come $dl_y = dy$ e $dl_z = dz$, e la sua direzione è indicata da un vettore diretto lungo la terza direzione, in questo caso:

Però, per un'area differenziale nel piano $y-z$ si ha: $d^2s_x = \hat{x} \cdot dy \cdot dz$. Analogamente: $d^2s_y = \hat{y} \cdot dx \cdot dz$ (piano $x-z$) e $d^2s_z = \hat{z} \cdot dx \cdot dy$ (piano $x-y$).

Il volume differenziale è uguale al prodotto di tutte e 3 le lunghezze differenziali: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

COORDINATE SFERICHE

Le coordinate sferiche sono un sistema di coordinate nello spazio determinato da 3 parametri, ρ, φ, ϑ . Detto ρ la lunghezza del raggio, e detto P un punto fisso nello spazio, il parametro ρ indica la distanza fra P e O , ϑ è l'angolo fra \vec{PO} e l'asse z , mentre φ è l'angolo fra l'asse x e la proiezione di \vec{PO} sul piano xy :



Passaggio dalle coordinate sferiche quelle cartesiane e viceversa:

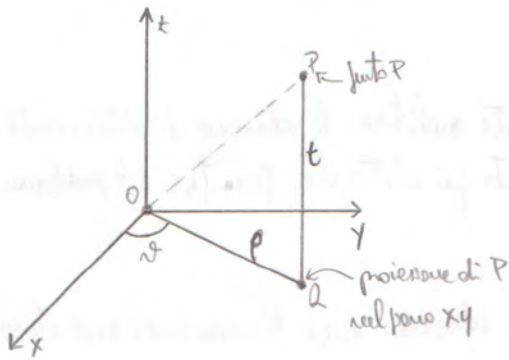
$$(\rho, \varphi, \vartheta) \rightarrow (x, y, z):$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \vartheta \end{cases}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \vartheta, \varphi):$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

Le coordinate cilindriche sono un sistema di coordinate nello spazio determinato da tre parametri ρ, φ, t . Detto O l'origine del sistema, e detto P un qualsiasi punto dello spazio, e detto Q la sua proiezione nel piano xy , il parametro ρ indica la lunghezza di OQ mentre φ indica l'angolo fra l'asse x e OQ .



Passeggiando delle coordinate cilindriche e quelle cartesiane e viceversa:

$$(\rho, \varphi, t) \rightarrow (x, y, z):$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = t \end{cases}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, t):$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ t = z \end{cases}$$



$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, t)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ t = z \end{cases}$$

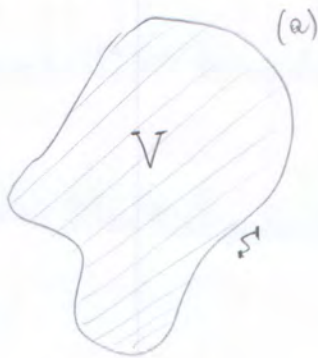


• Divergenza di una funzione vettoriale

Consideriamo un volume finito V di forma qualsiasi delimitato da una superficie S . Il flusso della funzione \vec{F} attraverso la superficie S vale:

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dividiamo ora il volume V in due parti in modo da ottenere due volumi V_1 e V_2 delimitati da due superfici S_1 e S_2 :



$$S = S_1 \cup S_2$$

$$V = V_1 \cup V_2$$

Per le superficie (b) il flusso di \vec{F} attraverso S vale: $\Phi = \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}_2$

Generalizzando, se dividiamo il volume in parti sempre più piccole, otteniamo intefoli di superficie sempre più piccoli: $\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$

L'obiettivo è quello di ottenere qualcosa che ne caratterizzi di una regione molto piccola, ovvero una caratteristica locale o puntuale dello spazio. A tal fine è utile definire le seguenti quantità:

Definizione di $\text{div} \vec{F}$: Tale rapporto tende, procedendo per divisioni successive del volume (e quindi delle superficie), ad un limite che costituisce una proprietà della funzione \vec{F} in quell'intorno e che prende il nome di divergenza di \vec{F} :

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

Tale limite esiste ed è indipendente da come avviene la suddivisione dello spazio. Nelle pratiche $\text{div} \vec{F}$ è il flusso uscente da V_i per unità di volume nel caso limite in cui V_i è infinitesimo. La $\text{div} \vec{F}$ è una grandezza scalare ed è funzione delle coordinate x, y, z .

• Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradsky)

Consideriamo un dominio X e un volume V delimitato da una superficie S . Come fatto precedentemente per definire la divergenza, dividiamo il volume V in tanti piccoli volumetti ΔV_i delimitati dalle superficie ΔS_i . In queste operazioni di divisione siamo liberi di scegliere in maniera arbitraria le loro forme, purché il loro insieme costituisca una partizione del volume di partenza. Successivamente riduciamo il numero di punti volumetti ed un processo limite prendendo tendere ad ∞ (il che fa tendere a 0 i valori dei volumetti). Avremo quindi infiniti volumetti infinitesimi. Nella definizione di divergenza vale: \Rightarrow

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{\Delta V_i} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \cdot \Delta V_i = \oint_{\Delta S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i \quad \left| \begin{array}{l} \Delta V_i = dV_i \\ \Delta S_i = dS_i \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV_i = \oint_{dS_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

4

integrando su tutti i volumetti ΔV_i otteniamo:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

I° MEMBRO: integrale sul volume delle $\operatorname{div} \vec{F}$

II° MEMBRO: integrale sulla superficie (flusso del comp. vettoriale \vec{F}) attraverso la superficie S che delimita V .

Conclusione: Il th. delle divergenze (o di Gauss-Ostrogradski) afferma che l'integrale delle divergenze di \vec{F} sul volume V è uguale al flusso di \vec{F} attraverso la superficie S che delimita il volume V .

• Divergenza in coordinate cartesiane: $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ ($\vec{A} \rightarrow$ comp. vettoriale)

Introducendo l'operatore nabla, definito come il vettore le cui componenti sono le derivate parziali rispetto ad x, y, z :

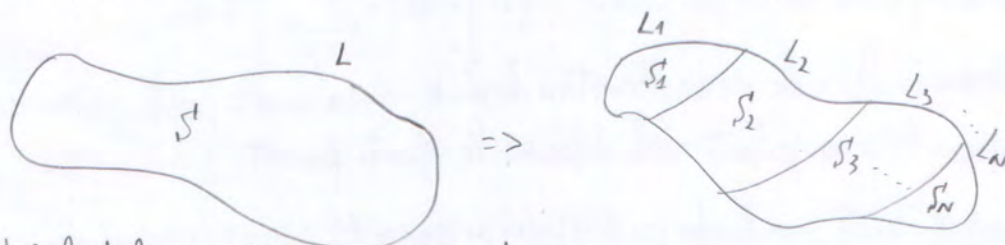
$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

possiamo scrivere l'espressione delle divergenze di \vec{A} in forme cartesiane come il prodotto scalare fra il nabla e il comp. vett.

generico \vec{A} : $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

• Rotore di una funzione vettoriale

Consideriamo una superficie S delimitata da un percorso chiuso L , ed una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$:



Consideriamo l'integrale di linea di \vec{F} lungo il percorso chiuso L :

$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$, che prende il nome di circolazione. Anche in questo caso, suddividendo L in L_i sempre più piccoli, posso vedere la circolazione Γ come:

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}_i \Rightarrow \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$$

Per definire il rotore consideriamo il rapporto tra la circolazione e l'area ed è coinvolte S , orientate dal verso \hat{u}_n , con direzione normale ed uscente dalla superficie. Facendo tendere a 0 la superficie che circonda un certo punto P , possiamo il seguente limite:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{S}$$

Il limite che otteniamo è uno scalare associato al punto P nel comp. vettoriale \vec{F} e alla direzione \hat{u}_n . Le parentesi $\nabla \times \vec{F}$ si può dire che risulta quindi un vettore:

$$(\operatorname{rot}) \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{S} \hat{u}_n$$

nella pratica il rot \vec{F} è la circulatoria del camp. vettoriale \vec{F} lungo una linea chiusa molto piccola nel campo (sintesi in cui S^2 (le n figure che si applicano alle linee) ne infuocano). Il rotore è una funzione vettoriale, cui l'esse funziona delle coordinate x, y, z .

• Teorema delle circulatorie (oddi Stokes):

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{e} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N S_i \cdot \left(\frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) \quad \text{per } N \rightarrow \infty \quad S_i \rightarrow 0 \quad \text{il termine fra parentesi tende a } \text{rot } \vec{F} \cdot \hat{u}_i:$$

$$= \sum_{i=1}^N S_i \cdot \left(\frac{\vec{F}_i}{S_i} \right) = \sum_{i=1}^N S_i \cdot (\text{rot } \vec{F}) \cdot \hat{u}_i \rightarrow \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{e} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

• Rotore in coordinate cartesiane:

$$(\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

• Gradiente

Se φ un camp. scalare. Il gradiente del camp. scalare φ , indicato con $\text{grad } \varphi$, il camp. vettoriale che in compo-
nenti sono le derivate parziali di φ rispetto a x, y, z : $\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi$

Il gradiente è quindi un vettore diretto secondo la massima variazione di φ e perpendicolare alle superfici in cui φ è costante.

• Gradiente in coord. cartesiane:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}$$

• Divergenza:

Se φ un camp. scalare o vettoriale. Il gradiente del camp. φ la divergenza del gradiente di φ :

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$$

• Divergenza in forme cartesiane:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}}{V} \quad (\text{divergenza})$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{th. di Gauss-Ostrogradskij})$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \hat{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{divergenza in coord. cartesiane})$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{S} \quad (\text{rotore})$$

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{th. della circolazione o di Stokes})$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \cdot \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \cdot \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \cdot \hat{k} \quad (\text{rotore in coordinate cartesiane})$$

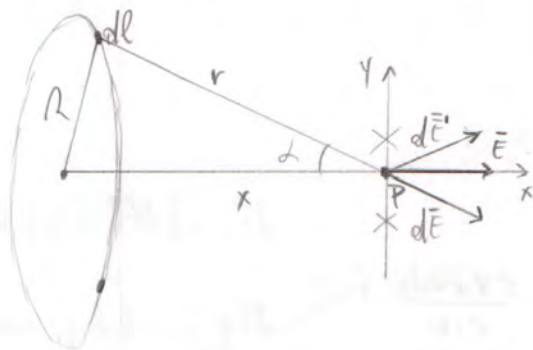
$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \hat{k} \quad (\text{gradiente di un campo scalare in coord. cartesiane})$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{laplaciano in coordinate cartesiane})$$

CAMPI ELETTROSTATICI DI ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

7

① Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico nei punti del suo asse:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

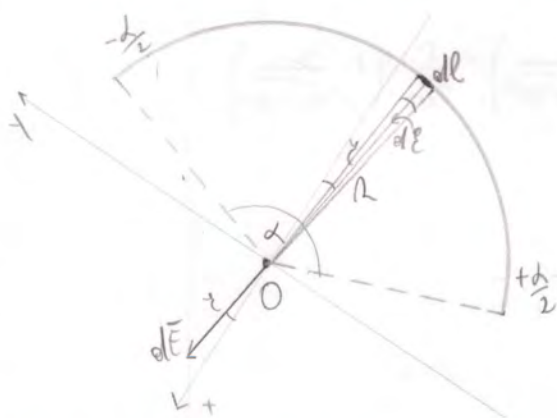
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(lunghezza anello)

② Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, e forme d'arco di circonferenza, nel suo centro:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad dl = R \cdot d\theta \quad dq = \lambda R \cdot d\theta$$

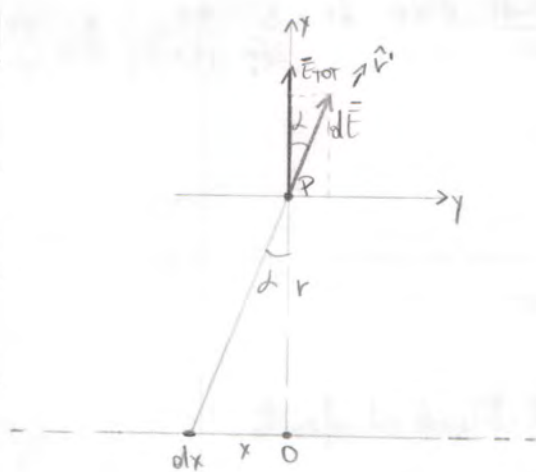
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos(\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot 2 \sin(\alpha/2)$$

③ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:



$$\lambda = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dx \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

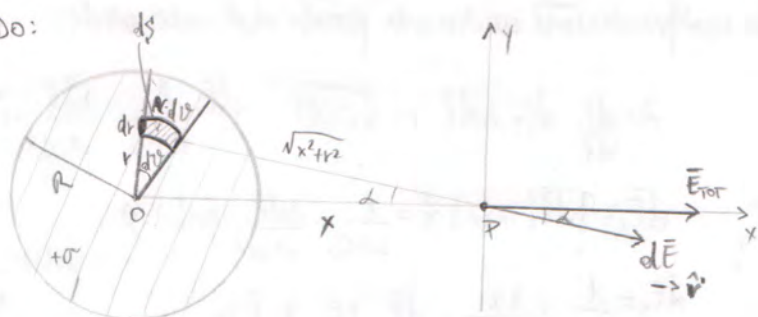
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \left[\frac{x}{r^2 \sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} r$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r^2} \left[\sin \alpha \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{r^2} \cdot 1 \quad E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

4) Campo elettrostatico prodotto da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse:

I° METODO:



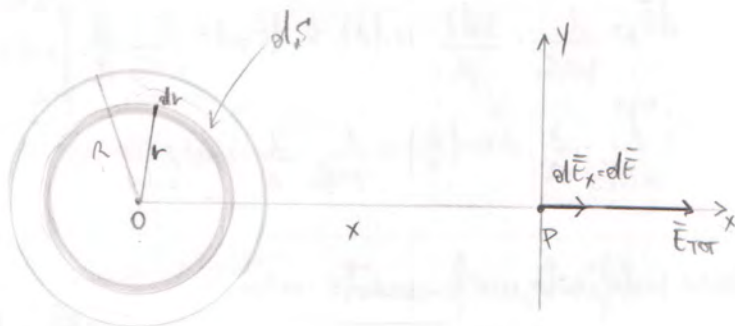
$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = r \cdot d\theta \cdot dr \quad dP = \sigma r \cdot d\theta \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}'$$

$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$
 $d\vec{E}_y$ (si elide per simmetria)

$$|d\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr \cdot x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$|\vec{E}_{\text{tot}}| = E_{\text{tot}} = \int_{\text{disco}} dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

II° METODO:

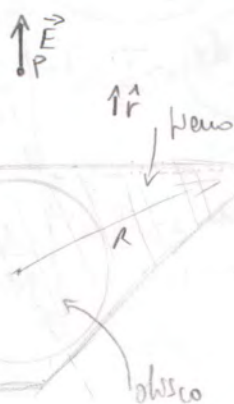


$$\sigma = \frac{dP}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = 2\pi r \cdot dr \quad dS \Rightarrow \text{anello differenziale} \quad \lambda = \frac{dP}{dl} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

5) Campo elettrostatico prodotto da un piano indefinito, uniformemente carico:

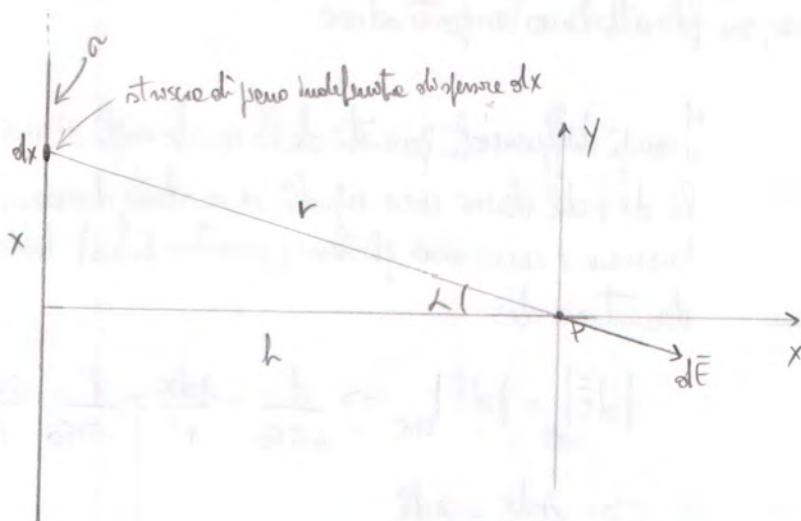
I° METODO:



Piano \rightarrow disco di raggio R che tende ad infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

con direzione perpendicolare al piano



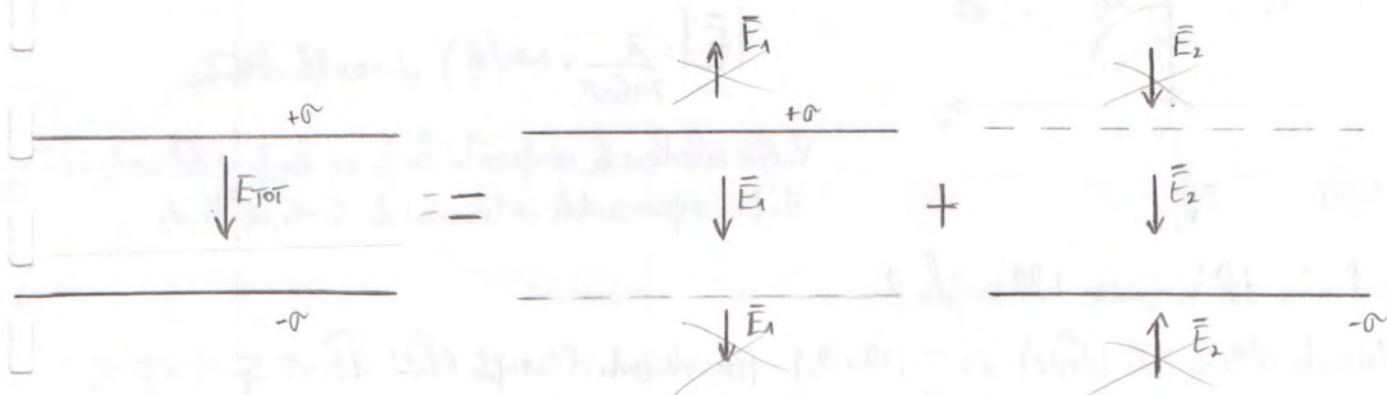
La striscia di pino può essere considerata ed un filo rettilineo indefinito con: $d\lambda = \sigma dx$.

$$\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{r} \quad \begin{cases} d\vec{E}_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} \\ d\vec{E}_y = |\vec{E}| \cdot \sin(\alpha) \cdot \hat{y} \end{cases} \quad \begin{aligned} |\vec{E}_x| = dE_x &= \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \cos(\alpha) \\ x &= h \cdot \tan(\alpha) \\ dx &= h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ h &= r \cos(\alpha) \Rightarrow r = \frac{h}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

$$d\lambda = \sigma dx = \sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$E_{\text{Tot}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Camp elettrostatico prodotto da due pini carichi uniformemente, indefiniti e paralleli:



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad |\vec{E}_{\text{Tot}}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| = 2 \cdot |\vec{E}_2| = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{all'esterno dei pini i due campi sono opposti} \\ \text{ed opposti, si elidono.} \end{array} \right)$$

Il camp è presente solo tra i due pini ed ha modulo pari a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, direzione perpendicolare ai pini, e verso da quello carico positivamente ($+\sigma$) a quello carico negativamente ($-\sigma$)

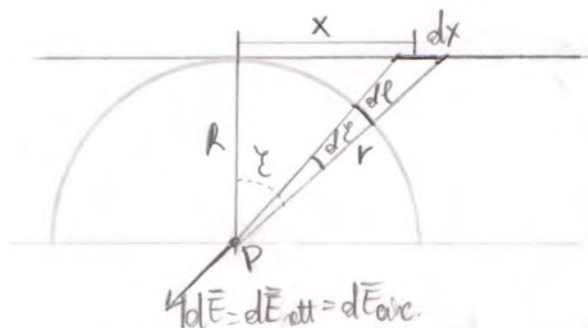
⑦ Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma di arco di circonferenza, nel punto P, centro della circonferenza, con filo rettilineo l'infinito esteso:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dl = \lambda dx$$

I campi differenziali generati dalle cariche sugli elementi differenziali dx e dl devono essere uguali, in modulo, direzione e verso. Direzione e verso sono gli stessi (rispetto al filo). Abbiamo poi da dimostrare che:

$$|d\vec{E}|_{\text{rett}} = |d\vec{E}|_{\text{arc}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{\lambda dl}{R^2}$$

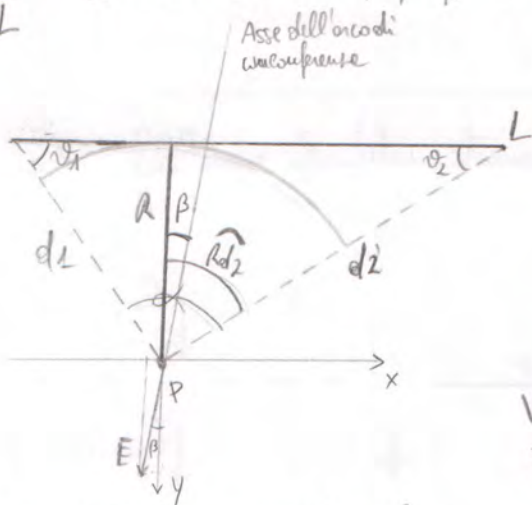


$$x = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta \Rightarrow R \cos^2 \theta = dx \cdot \cos^2 \theta \quad dl = R \cdot d\theta \Rightarrow dl = dx \cdot \cos^2 \theta \quad (\text{moltiplico e divido per } \frac{\lambda}{R^2})$$

$$\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{R^2} \cdot \cos^2 \theta \cdot dx \Rightarrow \frac{\lambda}{R^2} dl = \frac{\lambda}{(R^2 \cos^2 \theta)} dx \rightarrow R = r \cos \theta \Rightarrow r = \frac{R}{\cos \theta} \rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{r^2} \cdot dx} \text{ c.v.d.}$$

⑧ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L} \quad R \rightarrow \text{distanza di P dal filo, raggio dell'arco con centro in P.}$$



Per quanto detto precedentemente c'è un'equivalenza tra il campo generato in P dal filo e quello generato in P dall'arco di circonferenza, e vale:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \alpha \rightarrow \text{angolo al centro}$$

Voglio calcolare le componenti lungo x e lungo y del campo elettrostatico esprimendole in termini di R, theta1, theta2, d1, d2

Determino il valore dell'ampiezza dell'angolo beta:

$$(\text{considerando il triangolo } d_1 d_2 L) \quad \alpha = \pi - (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{considerando il triangolo } R d_2 L) \quad R d_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

$$\beta = R d_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[\frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[\frac{\pi - \theta_1 - \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi - 2\theta_2 - \pi + \theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (\text{sfornamento } \sin(-\alpha))$$

$$\text{posso scrivere: } \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{per cui: } |\vec{E}| = E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Possiamo determinare le componenti del campo elettrostatico lungo gli assi x e y fissati, come:

$$|\vec{E}_x| = E_x = E \cdot \sin(\beta) \quad |\vec{E}_y| = E_y = E \cdot \cos(\beta) \quad \text{N.B. le componenti lungo l'asse x è negativa in quanto è diretta nel verso opposto a quello d'orientamento dell'asse}$$

• Determinazione delle componenti λ_{inf} x del camp:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)]$$

Formule di prosteferi:
 $2 \cdot \cos\left(\frac{\rho + \varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\rho - \varphi}{2}\right) = \sin(\rho) - \sin(\varphi)$, per cui:
 $\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$

• Determinazione delle componenti λ_{inf} y del camp:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$$

Formule di prosteferi:
 $2 \cdot \cos\left(\frac{\rho + \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\rho - \varphi}{2}\right) = \cos(\rho) + \cos(\varphi)$, per cui:
 $\cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$

N.B.: Le componenti λ_{inf} l'asse x può essere scritta come:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)]$$

per il triangolo Δ di cui: $R = d_1 \cdot \sin(\varphi_1)$ e $R = d_2 \cdot \sin(\varphi_2)$
 per cui: $\sin(\varphi_1) = \frac{R}{d_1}$ e $\sin(\varphi_2) = \frac{R}{d_2}$

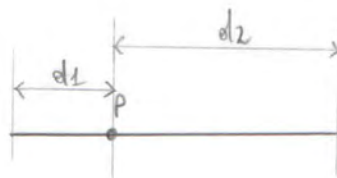
per cui:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left[\frac{R}{d_1} - \frac{R}{d_2} \right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

Resultante: $\vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ |\vec{E}_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \end{cases}$

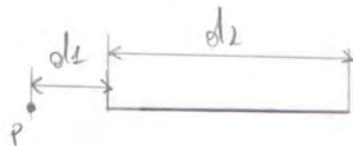
• Caso limite

- P si trova sul filo $\begin{cases} R = \phi \\ \varphi_1, \varphi_2 = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \infty \end{cases}$



- P si trova sulla retta del filo, ma esternamente ad esso

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \phi \end{cases}$$



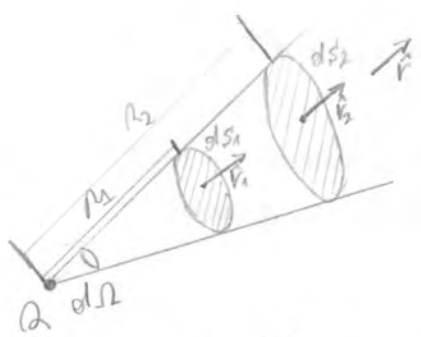
TEOREMA DI GAUSS

(12)

Problema: Flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme attraverso due superfici che sottendono un angolo solido.

- $d\Omega \rightarrow$ angolo solido
- $dS_1, dS_2 \rightarrow$ superfici
- \hat{r}_1, \hat{r}_2 vettori di orientamento delle superfici
- $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \rightarrow$ vettori del campo elettrico che attraversano le superfici

1° caso: le superfici elementari dS_1 e dS_2 sono perpendicolari alla raddiante r , e distanze diverse da Q .



$\vec{r} \rightarrow$ direzione raddiante

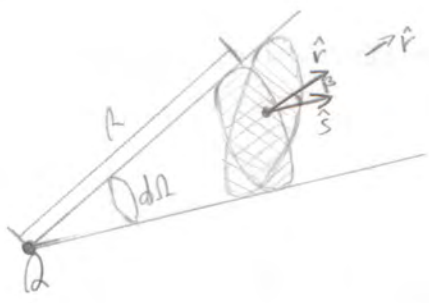
$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \hat{r} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \hat{r}_1$$

$$d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \hat{r} \cdot d\vec{S}_1 \quad |d\vec{S}_1| = d\Omega \cdot r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot d\Omega \cdot r_1^2 \Rightarrow d\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot d\Omega$$

$d\phi_1$ è indipendente dalla distanza, perciò: $d\phi_1 = d\phi_2, \forall r_1, r_2$

2° caso: le superfici elementari dS_1 e dS_2 si trovano alla stessa distanza R dalla carica Q , ma sono orientate come \hat{r} ed \hat{s} :



$$d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \hat{r} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \cdot \hat{s}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \hat{r} \quad d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1 \cdot \cos(\phi)$$

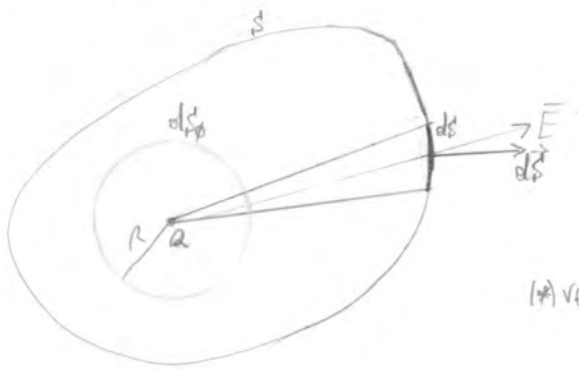
$$d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_2 \cdot \cos(\phi)$$

$$dS_1 = dS_2 \cdot \cos(\phi) \quad d\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot dS_1 \Rightarrow d\phi_1 = d\phi_2$$

Il flusso, fissato l'angolo solido $d\Omega$, non dipende né dalla distanza né dall'orientamento delle superfici elementari.

• Flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme Q attraverso una qualunque superficie chiusa S' , orientata verso l'esterno:

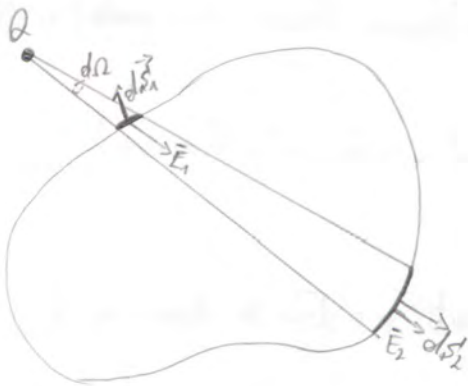
1° caso: CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE S



$$\phi_E(dS_0) = \phi_E(dS')$$

$$\phi_E(dS_0) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi_E(dS_0) = \phi_E(S) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(*) vedi appendice dietro



$$\varphi_E(S_1) = -\varphi_E(S_2) \Rightarrow \varphi_E(S) = 0$$

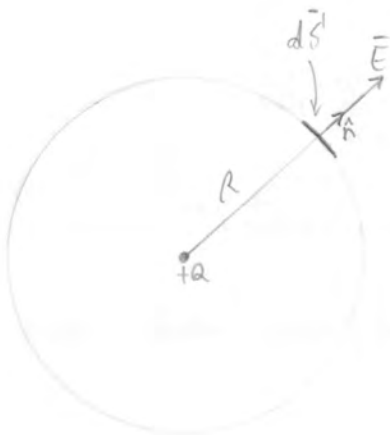
I risultati a cui siamo pervenuti possono essere generalizzati per ogni superficie chiusa attraverso il th. di Gauss:

Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa, orientata verso l'esterno, è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto:

$$\varphi_E(S) \Big|_{\text{chiusa}} = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

Q_{INT} è la carica interna netta: si può pensare anche che sia uguale a zero e allora la carica interna netta è nulla.

APPENDICE - FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA $+Q$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA RAGGIO R , ORIENTATA VERSO L'ESTERNO, CENTRATA SULLA CARICA



$$\varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

$$\varphi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

È possibile calcolare il campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche continue applicando i metodi di flusso del campo elettrostatico e il teorema di Gauss. I passi da seguire sono i seguenti:

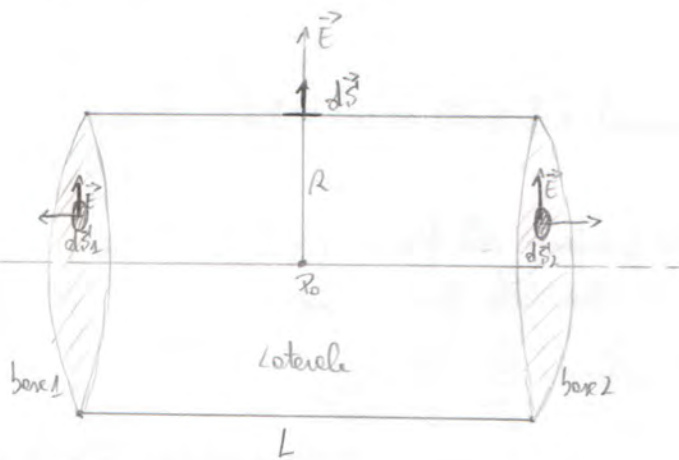
- Individuare la distribuzione continua di cariche e il punto in cui calcolare il campo elettrostatico,
- Scegliere una superficie Gaussiana, ovvero una qualsiasi superficie chiusa che contenga la distribuzione di cariche ed sia interna (le scelte se esplicita o implicita delle simmetrie del problema),
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso la definizione di flusso: $\Phi_E(S) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$
- Calcolare il flusso del campo elettrostatico attraverso il th di Gauss: $\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}$
- Eguagliare i due termini e ricavare l'espressione del campo elettrostatico

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA ALCUNE CONFIGURAZIONI (DISTRIBUZIONI CONTINUE) DI CARICA UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS

2) IL TEOREMA DI GAUSS

1) Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:

$\vec{S} \rightarrow$ superficie Gaussiana cilindrica di raggio R e lunghezza L



$$\Phi_E(S) = \int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{base 1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{base 2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left[\text{i vettori } \vec{E} \text{ e } d\vec{S} \text{ sono perpendicolari, per ogni superficie } d\vec{S}, \text{ quindi il loro prod. scalare è nullo} \right]$$

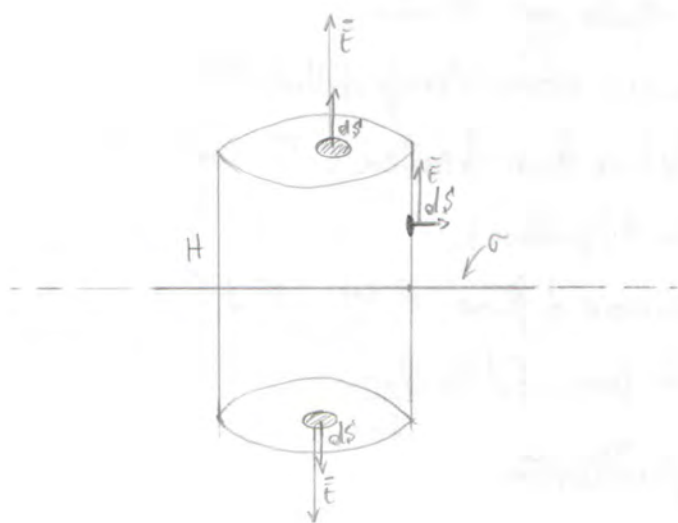
$$\Phi_E(S) = \int_{laterale} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \Phi_E(S) = \vec{E} \cdot \int_{laterale} d\vec{S} = E \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0}, \quad Q_{INT} = \lambda \cdot L \Rightarrow \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_E(S) = E \cdot 2\pi R \cdot L \\ \Phi_E(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 R}$$

② Camp elettrostatico generato da un filo infinito, uniformemente carico

15



$$\varphi_E(S) = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \phi \quad \left(\begin{array}{l} \text{per ogni superficie elementare della superficie laterale} \\ \text{del cilindro il vettore di orientamento della superficie} \\ \text{è ortogonale a quello del campo elettrico, per cui il} \\ \text{prodotto scalare è sempre nullo} \end{array} \right)$$

$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \left(\begin{array}{l} \text{il campo elettrostatico è uniforme e} \\ \text{le superfici di base sono uguali} \end{array} \right)$$

$$\varphi_E(S) = 2 \cdot \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot E \int_{\text{base}} dS = 2 \cdot E \cdot S_b$$

$$\varphi_E(S) = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S) = 2 \cdot E \cdot S_b \\ \varphi_E(S) = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot E \cdot S_b = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

③ Camp elettrostatico generato da una carica uniformemente distribuita su una superficie sferica

p.to p interno alla sfera $\rightarrow r < R$

p.to p esterno alla sfera $\rightarrow r > R$

$$\sigma_{\text{uniforme}} = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

I° caso - p.to interno alla sfera (scegli una superficie sferica concentrica S' con raggio $r < R$ passante per il punto P_{int} e calcola il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_E(S') = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{INT}} = q$$

$$\varphi_E(S) = \phi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_E(S') = \phi \\ \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow E = \phi$$

$$\varphi_E(S) = E \cdot S' = E \cdot 4\pi R^2$$

Il campo elettrostatico è nullo in tutti i punti interni alla sfera

II° caso - p.to esterno alla sfera (scegli una superficie sferica concentrica S' con raggio $r > R$ passante per il punto P_{ext} e calcola il flusso del campo elettrostatico)

$$\varphi_E(S') = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0}$$

$$\varphi_E(S) = E \cdot 4\pi R^2$$

$$\begin{cases} \varphi_E(S') = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(S) = E \cdot 4\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{\text{INT}}}{R^2}$$

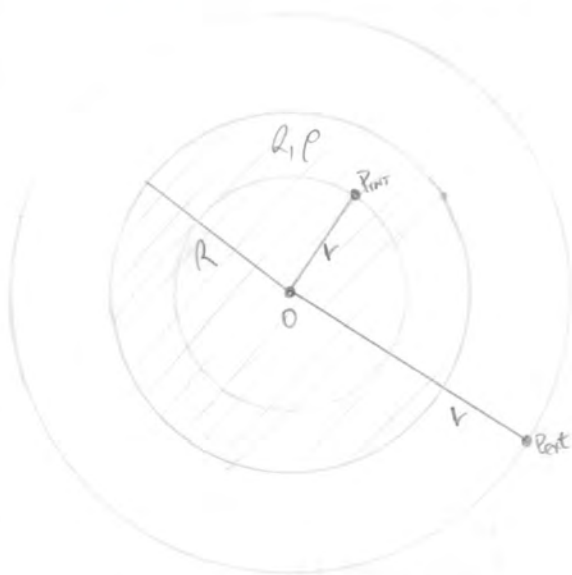
Assipilando:

16

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si calcola come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.

Il campo elettrostatico di una carica uniformemente distribuita in una sfera



1° caso - $r < R$ (interno sfere)

$$\begin{aligned} \varphi_E(s) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} & \varphi_E(s) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 & \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} &\Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \right. \end{aligned}$$

2° caso - $r > R$ (esterno sfere)

$$\begin{aligned} \varphi_E(s) &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} & \varphi_E(s) &= E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 & \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} &\Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \frac{R^3}{r^2} \right. \end{aligned}$$

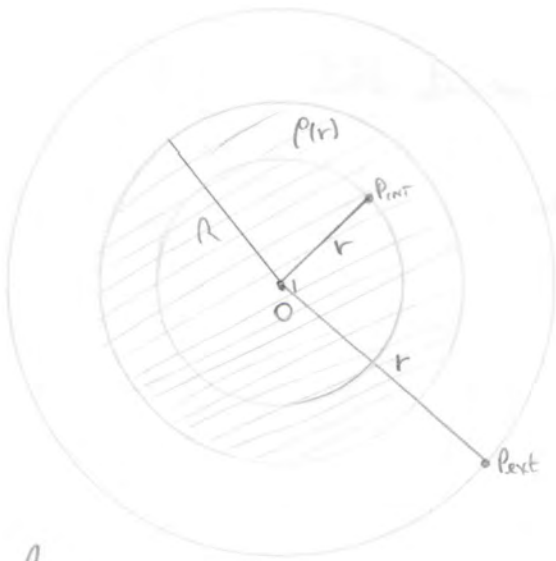
Assipilando:

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}, & r < R, \text{ interno delle sfere} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R, \text{ esterno delle sfere} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno delle sfere il campo si calcola come se le cariche fossero tutte concentrate nel centro.

5) Camp elettrostatico di una carica Q distribuita in una sfera di raggio R con densità volumica $\rho(r)$:

17



$$Q = \int_0^R \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

I° caso - $r < R$ (interno sfera)

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \Phi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi_E(S) = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

II° caso - $r > R$ (esterno sfera)

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 \quad \Phi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^R \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi_E(S) = E \cdot 4\pi r^2 \\ \Phi_E(S) = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Riepilando:

$$E = \begin{cases} \frac{\int_0^r \rho(\xi) \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r^2}, & r < R, \text{ interno sfera} \\ \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno sfera} \end{cases}$$

N.B.: Anche in questo caso, la densità di carica $\rho(r)$ può essere calcolata a partire dalla densità di campo elettrico $E(r)$.

Distribuzione delle cariche elettriche in un conduttore isolato

18

Se somministriamo ad un conduttore una carica Q , dopo un certo tempo il sistema raggiungerà una configurazione di equilibrio; in qualsiasi volume elementare dV interno al conduttore non c'è più carica in movimento, perciò:

$$\vec{E} = d\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \vec{F} = q(\text{qualsiasi}) \quad d\vec{p} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

Il campo elettrostatico è nullo in ogni punto interno del conduttore.

Consideriamo ora una superficie Gaussiana S , interna al conduttore. Vogliamo determinare il flusso del campo elettrico attraversando la superficie S utilizzando direttamente la definizione e poi il Teorema di Gauss:

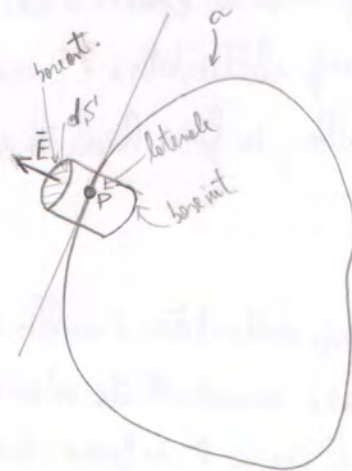
$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{In punto scelto in precedenza il campo elettrostatico} \\ \text{è nullo all'interno del conduttore, perciò:} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{INT} = \Phi$$

Si deduce che la carica interna ad S è nulla. Poiché tale considerazione vale per qualsiasi superficie S interna al conduttore, allora le cariche somministrate non può che trovarsi sulle superficie esterne del conduttore, distribuite con una densità superficiale σ che, in generale, varia da punto a punto della superficie del conduttore.

Teorema di Coulomb

Consideriamo un conduttore carico con una densità di cariche superficiale σ . Vogliamo determinare il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P della superficie del conduttore.

Il campo risulta perpendicolare al piano tangente alla superficie del conduttore nel punto P ed orientato verso l'esterno se σ è positivo in quel punto. Applicheremo il teorema di Gauss ad un cilindro elementare di base dS ed altezza infinitesima, disposto perpendicolarmente al piano tangente:



$$d\Phi_E(S) = d\Phi_E(dS_{ext}) + d\Phi_E(dS_{int}) + d\Phi_E(dS_{lat}) \Rightarrow d\Phi_E(dS) = d\Phi_E(dS_{ext})$$

$$d\Phi_E(dS) = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$$

$$dQ_{INT} = \sigma dS$$

$$d\Phi_E(dS) = E \cdot dS = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Abbiamo così il teorema di Coulomb:

Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze del punto P della superficie di un conduttore vale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma \rightarrow \text{densità superficiale di cariche in } P \\ \hat{n} \rightarrow \text{vettore della normale uscente dal conduttore in } P (\perp \text{ al piano tangente in } P) \end{array} \right.$$

- Consideriamo il campo elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Inducendo con L una linea chiusa qualunque, la circolazione del campo lungo di essa risulta essere nulla:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{La circolazione di un campo vettoriale è nulla se e solo se il campo vettoriale è conservativo.} \\ \text{Dunque, possiamo affermare che il campo elettrostatico è conservativo.} \end{array} \right.$$

- Consideriamo una distribuzione continua di carica ρ e fissiamo una superficie chiusa S , che recalchi il volume V . Per il th. di Gauss:

$$\varphi_E(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ Q_{INT} = \int_V \rho dV \end{array} \right. \Rightarrow \left(\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \right) \quad \left(\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right) \quad \left| \begin{array}{l} (1) \text{ per il th. della divergenza:} \\ \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \rho dV \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{TH. DI GAUSS IN FORMA LOCALE}$$

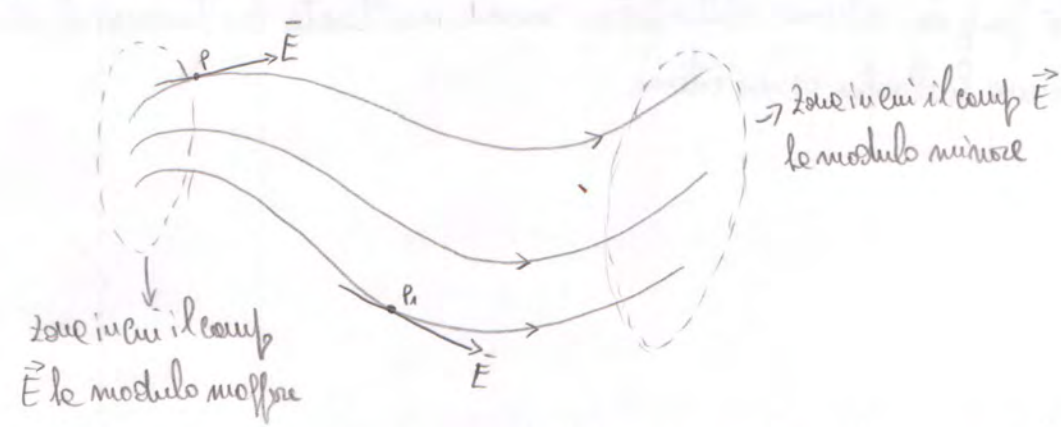
Comp elettrostatico conservativo $\Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{E} = 0} \end{array} \right.$ Th. di Stokes

Se il rotore di un campo vettoriale è nullo si dice che il campo è irrotazionale. Un campo vettoriale conservativo è irrotazionale. Il campo elettrostatico è quindi conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa L è nulla; in altre parole la conservatività si esprime dicendo che \vec{E} è irrotazionale, ovvero $\text{rot} \vec{E} = 0$.

In breve:

- Il campo elettrostatico è nullo in tutti i punti interni ad un conduttore carico;
- Le cariche sono distribuite ad un conduttore in distribuzione lungo la sua superficie con una densità superficiale di carica σ , in genere variabile (NFI);
- Per il th. di Coulomb, il campo elettrostatico in un p.to P nella immediate vicinanze di un conduttore carico è pari a: $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$, dove \hat{n} è il vettore perpendicolare al piano tangente alla superficie passante per il p.to P considerato;
- Il campo elettrostatico \vec{E} è conservativo, in quanto la sua circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa L è nulla: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$;
- Il th. di Gauss è esprimibile in forme locali in termini di divergenza: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- È possibile esprimere in forme locali anche la conservatività del campo elettrostatico utilizzando l'operatore differenziale rotore: $\text{rot} \vec{E} = 0$.

- Rappresentano un metodo facile per descrivere il campo elettrostatico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche. Essi sono disegnate in modo che in ogni punto delle linee il campo elettrostatico risulta tangente ed esce:



- Le dove le linee sono più fitte l'intensità del campo è maggiore, dove sono più distanziate l'intensità del campo è minore
- La direzione del campo in un punto P appartenente alle linee di flusso è quella del verso tangente alle linee nel punto considerato, con verso uguale a quello delle linee stesse
- Per un punto passa una ed una sola linea di flusso, una sola volta

SCHEMA ELETTROSTATICO

- Si consideri un conduttore cavo. Appoi essendoci dentro una certa carica, queste si distribuiscono sulla sua superficie esterna con densità σ . Andiamo ora a chiederci all'interno della cavità:



Se considero una superficie S_0 contenuta nel conduttore (tra le superficie interne ed esterne), sappiamo che il campo elettrostatico è nullo, per il th. di Gauss:

$$\Phi(S) = \frac{Q_{INT}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{INT} = 0$$

Quindi le cariche interne nelle superficie S_0 è nulla. Ciò può non escludere che possano trovarsi, nelle superficie interne, delle cariche positive e negative tali per cui la loro somma sia nulla. Dimosteremo che non si possono presentare.

- Consideriamo lo stesso conduttore cavo ed una linea L che si estende su una parte nel conduttore (tra le due superficie) e su una parte nella cavità. Ipotesi: la presenza di cariche sulle superficie interne del conduttore non avviene.



Il contributo alle linee di campo dovuto alle parti delle linee interne al conduttore (tra le 2 superficie) è nullo, dato che il campo elettrico è nullo; ma il contributo dato alle parti delle linee interne alla cavità non è diverso da ϕ (se non presenti delle cariche, vi è un campo elettrico). Per cui si avrà:

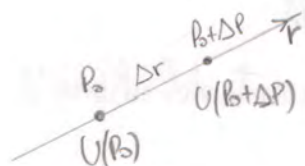
$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$, che è impossibile, dato che \vec{E} è conservativo e vale: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ per L chiusa

- Quindi non vi è alcuna corrente sulle superficie interne del conduttore.
 - Nell'interno c'è un conduttore con carica $+Q$, sulle superficie interne elle cariche si distribuiscono in modo da annullare l'effetto delle cariche esterne.
 - La legge di Gauss non viene in nessun modo modificata da quanto vi è all'esterno.
- Infine, le cariche si comportano come elettrostatiche: cariche interne alterano le situazioni di equilibrio interno contro una qualunque carica esterna.



- Se U una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio, l'insieme dei valori assunti da U in ogni punto P di Ω costituisce un campo scalare. Un campo scalare è quindi una funzione scalare del punto, indicata dal vettore delle coordinate cartesiane x, y, z ;
- Se A una funzione vettoriale definita in una regione Ω dello spazio, l'insieme di vettori (vettori) assunti da A in ogni punto P di Ω costituisce un campo vettoriale.

- Se $U = U(P)$ una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio, lungo una generica direzione \vec{r} , nel passare dal punto P_0 al punto $P_0 + \Delta P$ la funzione passa dal valore $U(P_0)$ al valore $U(P_0 + \Delta P)$, con $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$.



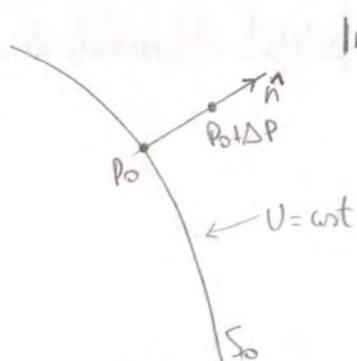
Si definisce derivata direzionale della funzione U nel punto P_0 lungo la direzione \vec{r} :

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

se il lim esiste ed è finito

- La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un campo scalare lungo la direzione \vec{r} di un vettore.

- Se S_0 una superficie immersa in un campo scalare U , costante in tutti i punti di S_0 . Definiamo \hat{n} il vettore normale a S_0 orientato nel verso dei valori crescenti di U ; si sceglie un punto P_0 di S_0 e una distanza ΔP da P_0 tale che: $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$ lungo la direzione \hat{n} :



Il gradiente di U in P_0 è il vettore diretto lungo \hat{n} che ha per modulo la derivata direzionale di U lungo \hat{n} :

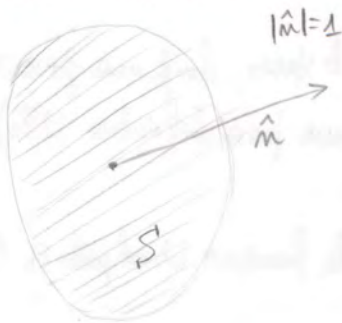
$$\vec{\text{grad}}(U)|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{dU}{dr} \right|_{P_0}$$

- Effettuando il gradiente in tutti i punti di Ω si definisce il campo vettoriale $\vec{\nabla}U$.
- Noto il gradiente è possibile individuare la derivata direzionale lungo qualsiasi direzione.
- La direzione del gradiente di un campo scalare è soltanto quella che dà massima variazione delle funzioni U , ovvero la direzione lungo la quale è massima la derivata direzionale delle funzioni.

• Se $A = \nabla U$, allora la funzione scalare U è definita (potenziale) della funzione vettoriale A . 23

• Considerando le derivate direzionali di una costante nulla, allora possiamo definire un altro campo vettoriale B definito come $B = U + U_0$, con U_0 costante, è un potenziale per A : $B = U + U_0$ $\nabla B = \nabla U = A$ (le costanti non alterano il valore delle derivate)

• Se \vec{A} un campo vettoriale definito in uno spazio Ω ed S una superficie aperta immersa in Ω . Definiamo \hat{n} come il vettore normale uscente da S :

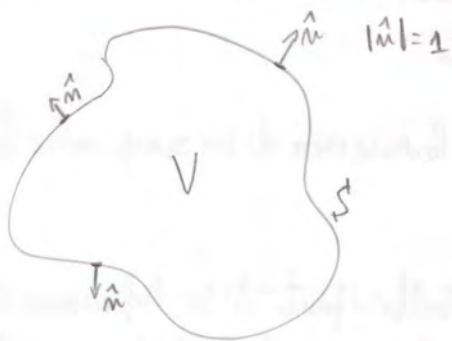


Definiamo il flusso Φ_S del campo vettoriale \vec{A} attraverso la superficie

$$S \text{ come } \Phi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\Phi_A(S) = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \vec{A}_n \, dS = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

• Consideriamo ora una superficie chiusa S immersa in Ω , con la normale uscente dal volume V :

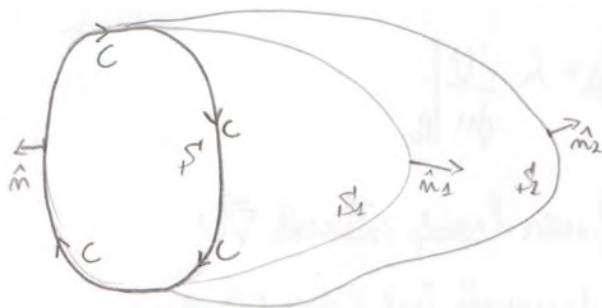


Il flusso attraverso la superficie chiusa S del campo vettoriale

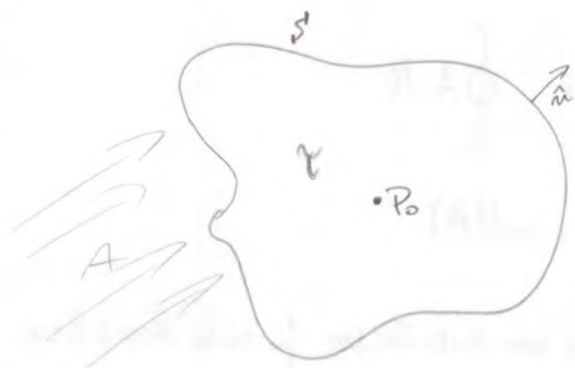
$$\vec{A} \text{ è: } \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

• Se $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = 0$ allora valdica \vec{A} è conservativo nel flusso

• Se un campo vettoriale \vec{A} è conservativo, il flusso attraverso tutte le superfici aperte delimitate da una stessa curva chiusa C ha lo stesso valore:



- Se S è una superficie chiusa, contenente il volume \mathcal{V} , immerge in un campo vettoriale A e un punto P_0 interno ad essa:



La densità divergente di A in P_0 è definita:

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_S A \cdot n \, dS}{\mathcal{V}} = \left. \frac{d\varphi}{d\mathcal{V}} \right|_{P_0}$$

La densità divergente è definita prendendo collassare il volume \mathcal{V} nel punto P_0 .

- La densità divergente rappresenta un flusso uscente dall'unità di volume. Integrando la densità divergente in tutto il volume, quindi, si ottiene il flusso uscente dell'intera superficie chiusa che racchiude il volume in cui la densità divergente è stata calcolata.

- Le espressioni precedentemente enunciate se sotto il nome di teorema di Gauss:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} \, d\mathcal{V} = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

ovv:

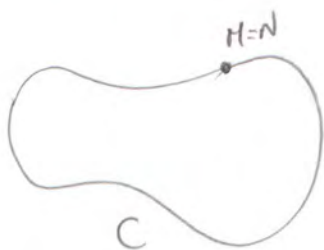
L'integrale della densità divergente di A sul volume \mathcal{V} è uguale al flusso di A fuori la superficie.

- Consideriamo un campo vettoriale A definito in Ω e C una curva in Ω contenuta. Assumendo un verso di percorrenza in C , definiamo l'integrale curvilineo:



$$\underline{I} = \int_M^N \underline{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_C \underline{A} \cdot d\vec{\ell}$$

- Se la curva è chiusa, $M=N$:



$$\int_M^N \underline{A} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \underline{A} \cdot d\vec{\ell}$$

che rappresenta la circolazione del campo A lungo la linea chiusa C .

Quindi la circolazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa è l'integrale del campo lungo la linea.

- Consideriamo una funzione vettoriale A (camp vettoriale) definita in uno spazio Ω e una linea chiusa C che delimita una superficie S :



lavoro fatto lungo C di A è: $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

definisco: $\lim_{S \rightarrow \emptyset} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{S} = \text{rot}(\vec{A})$

Il rotore può essere visto come una circulatoria in ante di superficie

- Valida il Th. di Stokes (o delle circulatorie):

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Per una funzione conservativa si definisce il lavoro come la differenza di energia potenziale $(U_A - U_B)$. Per un campo di forza conservativo la funzione scalare se sotto il nome di potenziale (P.M.A) che, nel caso del campo elettrostatico è definito potenziale elettrostatico V .

Nota la corrispondenza tra il campo elettrostatico vettoriale \vec{E} e il campo scalare potenziale elettrostatico V , è possibile osservare lo stesso fenomeno fisico in termini di campo elettrostatico che di potenziale elettrostatico.

In breve:

$$\vec{F}_c = - \text{grad } U(x, y, z) \longrightarrow \vec{E} = - \text{grad } V(x, y, z)$$

$$\text{grad } V = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad \vec{E} = - \text{grad}(V) = - \vec{\nabla} V$$

La relazione inversa che permette di passare dal campo vettoriale \vec{E} e quello scalare V è data da integrali:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Eseguendo il calcolo integrale del campo elettrostatico si possono calcolare differenze di potenziale $(V_A - V_B)$ tra il p.to di partenza e il p.to di arrivo. In base a come si scelgono i punti A e B si hanno infiniti potenziali di

\vec{E} . È possibile pensare, ad esempio, un p.to di partenza A, facendo variare B in tutto lo spazio. In questo modo si otterrebbe un unico campo scalare, ovvero come varrebbe il potenziale da A a tutti i punti dello spazio.

Scegliendo più il p.to A, si ottiene un nuovo campo scalare potenziale.

In altre parole, il potenziale è definito e meno di una costante.

Il fatto che il potenziale sia definito e meno di una costante non altera in nessun modo il valore del campo elettrico, in quanto la presenza delle costanti non altera in nessun modo il valore del gradiente.

In BREVE:

Essendo \vec{E} un campo conservativo, esso è esprimibile come il gradiente di un campo scalare: $\vec{E} = - \text{grad } V$.


Il campo scalare V è definito potenziale elettrostatico, che rappresenta il lavoro per unità di carica compiuto da \vec{E} in spostare, quindi, una carica tra due punti dello spazio.

La funzione potenziale è definita e meno di una costante arbitraria.

PREMESSA MATEMATICA 2: DESCRIZIONE DI FORTE CONSERVATIVE: (\vec{F} conservative)

(27)

- Consideriamo una f.ve \vec{F} fissare dello spazio e due punti di applicazione A e B di \vec{F} . Possiamo definire un lavoro associato che va da A a B come segue:



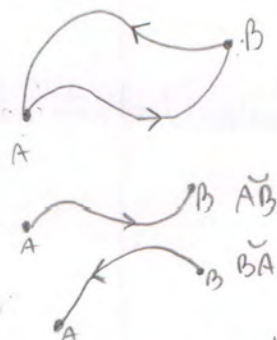
$$\text{Si definisce lavoro da A a B della f.ve } \vec{F}: L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Se la f.ve \vec{F} è conservativa il lavoro non dipende dallo specifico percorso ma delle posizioni dei punti A e B.

Questo è dimostrabile partendo dal concetto di conservatività di una f.ve: $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, $\forall L$ chiuso, in Ω

Si vuol dire che, considerando un altro percorso alternativo da A a B, in

si può unire un solo percorso P del tipo \overline{ABA} chiuso per lui solo:



$$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ ma: } \overline{ABA} = \overline{AB} \cup \overline{BA}, \text{ con:}$$

$$\oint_{ABA} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Essendo punto rilevante solo la f.ve \vec{F} e il percorso alternativo \overline{BA} scelto, allora l'integrale è indipendente dal percorso.

Il lavoro da A a B di una f.ve conservativa è quindi esprimibile come la differenza di una funzione in A e in B:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = U_A - U_B$$

La funzione U si detta il nome di energia potenziale legata alla f.ve.

DEFINIZIONE DEL POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il campo elettrico in P.M.1 un camp. scalare è esprimibile attraverso un camp. vettoriale attraverso la relazione

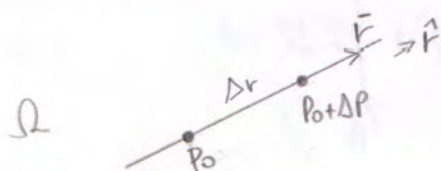
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U. \text{ Ciò è valido anche per il camp. elettrostatico } \vec{E}, \text{ anch'esso esprimibile come il gradiente di una funzione scalare } V \text{ che è definita potenziale elettrostatico: } \vec{E} = -\text{grad}(V) = -\vec{\nabla}(V).$$

Il punto è un'idea dimensionale ricordando quanto detto nella P.M.2: Abbiamo parlato di una funzione f.ve \vec{F} , ma ora veniamo in presenza di un camp. (\vec{E}) che è una f.ve per unità di carica. Per tale motivo, parleremo di lavoro per unità di carica:

$$\frac{L}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \quad \text{e} \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

PREMESSA MATEMATICA: PASSAGGIO DA UN CAMPO SCALARE AD UN CAMPO VETTORIALE

- Se U una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio; l'insieme di valori assunti da U in ogni punto P di Ω costituisce un camp scalare. Un camp scalare è quindi una funzione scalare del punto, individuato dalle coordinate cartesiane x, y, z ;
- Se A una funzione vettoriale definita in una regione Ω dello spazio; l'insieme di valori (vettori) assunti da A in ogni punto P di Ω costituisce un camp vettoriale
- Sia $U = U(P)$ una funzione scalare definita in una regione Ω dello spazio; fissiamo una generica direzione indicata lungo la direzione \hat{r} ; nel passare dal punto P_0 al punto $P_0 + \Delta P$ la funzione passa dal valore $U(P_0)$ al valore $U(P_0 + \Delta P)$, con $U(P_0 + \Delta P) > U(P_0)$:



Si definisce derivata direzionale delle funzione U nel punto P_0 lungo la direzione \hat{r} :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{P_0} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{U(P_0 + \Delta P) - U(P_0)}{\Delta r}$$

La derivata direzionale di una funzione scalare rappresenta quindi la variazione di un camp scalare lungo la direzione fissata da un vettore

- Si definisce gradiente di U in P_0 il vettore diretto lungo una direzione fissata \hat{n} ed il cui modulo è la derivata direzionale di U lungo \hat{n} :

$$\text{grad}(U) \Big|_{P_0} = \hat{n} \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{P_0}$$

Effettuando il procedimento in tutti i punti di Ω si definisce il camp vettoriale $A = \vec{\nabla}(U)$. [$\vec{\nabla}$ è il simbolo del gradiente]

La direzione del gradiente di un camp scalare è solitamente scelta come quella di massima variazione della funzione U , ovvero la dove è massima la derivata direzionale di U .

- Se $A = \vec{\nabla} U$, allora la funzione scalare U è definita potenziale della funzione vettoriale A .
- Essendo la derivata direzionale di una costante nulla, allora possiamo definire altro camp scalare V definito come $V = U + U_0$, con U_0 costante, è un potenziale per A : $V = U + U_0$ $\vec{\nabla} U = \vec{A}$ allora $\vec{\nabla} V = \vec{\nabla} U = \vec{A}$ (le costanti non alterano il valore del gradiente)
- Il gradiente in coordinate cartesiane vale: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} U \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} U \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} U \hat{k} \right)$

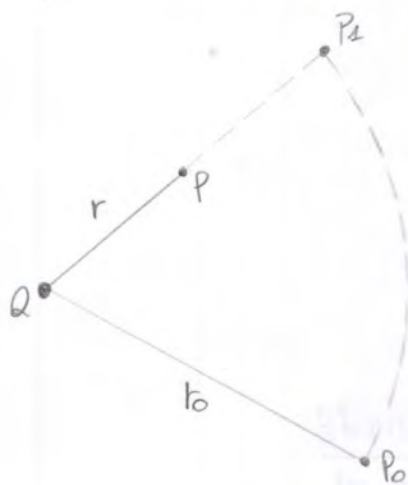
Essendo il potenziale definito e meno di una costante, non interessa calcolare una differenza di potenziali, tra un punto P e un punto P_0 :

$$\Delta V_{PP_0} = V_P - V_{P_0} = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Scegliendo P_0 all'infinito, otteniamo $V_{P_0} = \phi$, per cui: $V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

• Potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme:

$Q \rightarrow$ carica puntiforme $P \rightarrow$ punto esistente reale $P_0 \rightarrow$ punto fittizio esistente ro da Q



La differenza di potenziale $\Delta V_P = V_P - V_{P_0}$ si ottiene integrando il campo elettrostatico lungo un qualsiasi percorso che va da P a P_0 . In generale, per comodità di calcolo, si prende come tratto del tratto reale $\overline{PP_1}$ e dell'arco P_1P_0 :

$$\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$$

$$\int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0}$$

Il secondo integrale è nullo in quanto il campo elettrostatico \vec{E} ha direzione perpendicolare a tutti i tratti della differenza $d\vec{l}$ lungo l'arco P_1P_0 . Lungo il tratto reale $\overline{PP_1}$ vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, \text{ da } P \text{ a } P_0, \text{ per cui l'origine in } Q: V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{P_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r^2} dr + V_{P_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-) \left[\frac{1}{r} \right]_r^{r_0} + V_{P_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] + V_{P_0}. \text{ Portando } P_0 \text{ all'infinito, } V_{P_0} = \phi, \text{ per cui: } \boxed{V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

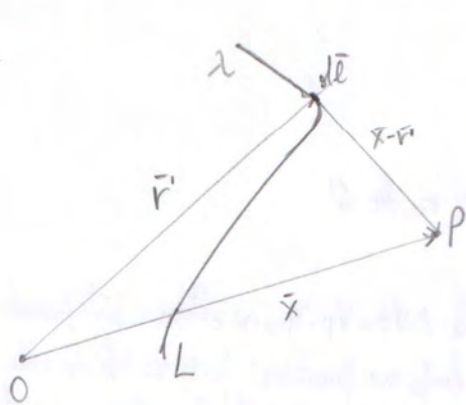
Il risultato può essere esteso, per la validità del principio di sovrapposizione degli effetti, ad una distribuzione di N cariche puntiformi. Date N cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_N , il potenziale nel punto P è dato dalla somma dei vettori posizione \vec{r}_i e viene sommando i potenziali in P prodotti da ciascuna delle N cariche, ed estensione r_i dall'origine:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

• Potenziale elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche: (30)

Il risultato ottenuto per una distribuzione discreta di cariche puntiformi può essere inteso ad una distribuzione continua di cariche di tipo lineare, superficiale e volumica. Si considera che la sommatoria viene sostituita da un integrale esteso a tutte le distribuzioni continue di cariche:

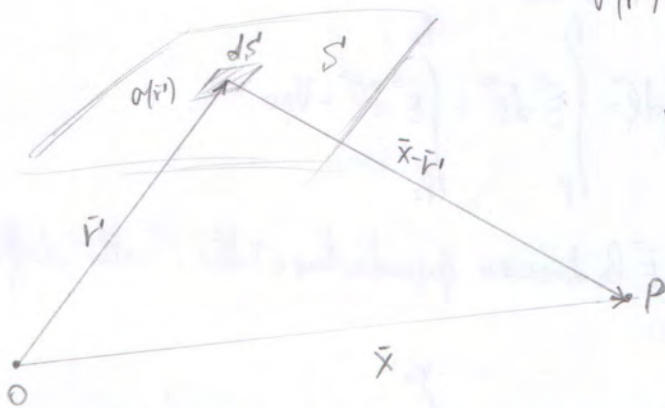
- Distribuzione lineare di cariche:



$$\lambda = \lambda(\vec{r}') : dq = \lambda(\vec{r}') \cdot d\vec{l}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') \cdot d\vec{l}}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

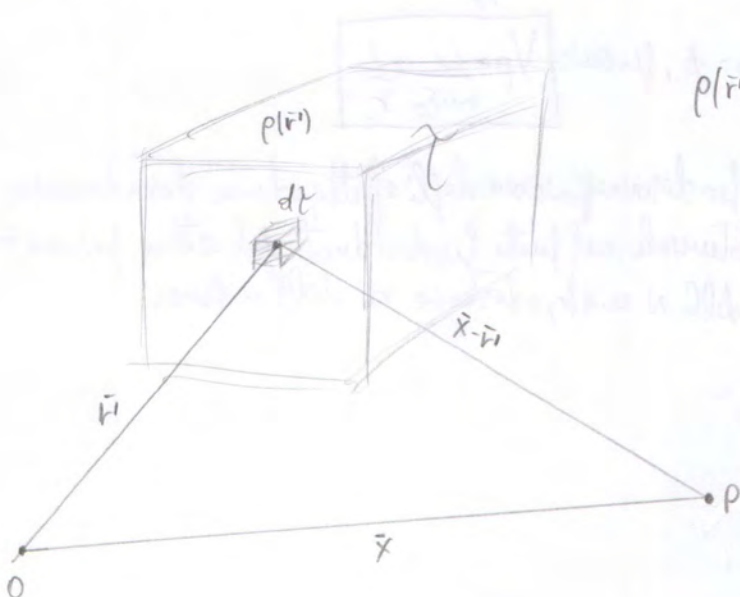
- Distribuzione superficiale di cariche:



$$\sigma(\vec{r}') : dq = \sigma(\vec{r}') \cdot dS'$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot dS'}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

- Distribuzione volumica di cariche:



$$\rho(\vec{r}') : dq = \rho(\vec{r}') \cdot dV$$

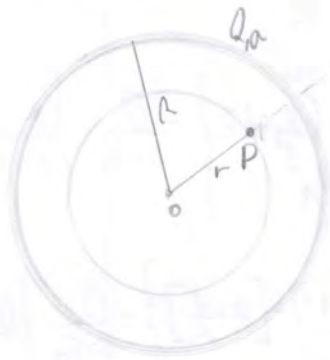
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV}{|\vec{x} - \vec{r}'|}$$

Di seguito verranno calcolati i potenziali elettrostatici generati da una carica Q uniformemente distribuita, dapprima sulla superficie sferica e poi all'interno della sfera (nel suo volume). Ciò viene fatto partendo dall'espressione del campo elettrostatico generato dalla configurazione di carica ed integrandolo tra due punti P e P_0 scelti opportunamente. È utile ricordare che l'espressione del campo elettrostatico in punti così è diversa per due punti, uno interno alla sfera ed uno esterno ad essa.

Per tale motivazione, anche il potenziale elettrostatico avrà espressioni diverse per punti interni ed esterni della sfera. Come fatto per la soluzione del campo elettrostatico, considereremo una superficie concentrica di raggio r , in modo che, scelto il punto P di interesse, finito ritrovi nella superficie considerata. Per un punto interno alla sfera di raggio R , sceglieremo un $r < R$ ($0 < r < R$), per un punto esterno alla sfera un $r > R$.

• Potenziali elettrostatici generati da una carica Q uniformemente distribuita su una superficie sferica:

- P interno alla sfera ($r < R$):

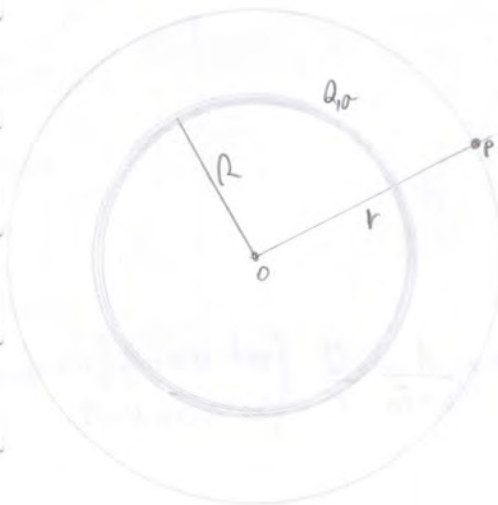


$$\vec{E}_{\text{superficie}} = \begin{cases} 0, & r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} & \text{(ext. sfera)} \end{cases}$$

- scelto P_0 all'infinito, quindi $V_{P_0} = V_{\infty} = \phi$

$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \phi dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \left[\frac{1}{r} \right]_R^{+\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot \left[0 - \frac{1}{R} \right] = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- P esterno alla sfera ($r > R$):



$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{+\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[0 - \left(-\frac{1}{r}\right) \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

In definitiva:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$\rightarrow V_P = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}, & r > R \end{cases}$$

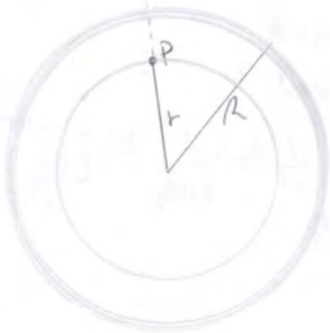
come ci si poteva aspettare, il potenziale all'interno delle sfere è una costante, indipendente dal punto P scelto. Il fatto che la costante è misurabile matematicamente dal fatto che il camp. \vec{E} è il grad(V), e il gradiente di una costante è zero ϕ , che è proprio il camp. elettrostatico in punti interni alle sfere.
Inoltre, per $r > R$, il potenziale si comporta come se le cariche Q fossero concentrate nel centro.

• Potenziale elettrostatico generato da una carica Q uniformemente distribuita in una sfera:

$$E_{sfera} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r, & \phi < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (ext. sfera)} \end{cases} \quad \phi_0 \rightarrow +\infty \quad V_{\phi_0} \rightarrow \phi$$

- Pot. interno alle sfere ($r < R$):

$+\infty \phi_0$



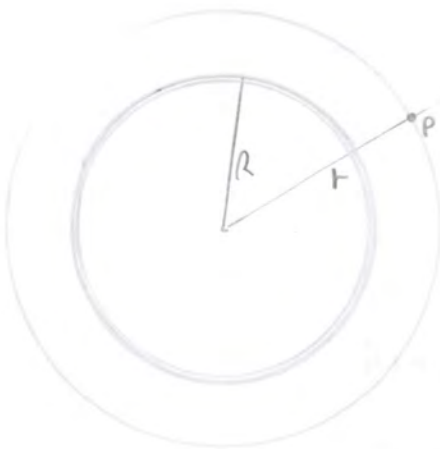
$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_P^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr + \int_P^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr + \int_P^R r dr \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^{+\infty} + \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_P^R \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\left(0 - \left(-\frac{1}{R} \right) \right) + \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} P^2 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

- Pot. esterno alle sfere ($r > R$):

$\phi_0 \rightarrow +\infty$

$$V_P = \int_P^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \quad \left(\text{vedi caso superficie sfera} \right)$$



Indefinite:

(33)

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot \vec{r}, & \phi < r < R \text{ (int. sfera)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R \text{ (est. sfera)} \end{cases} \longrightarrow V_P = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \phi < r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r > R \end{cases}$$

↳ notare che, per l'esterno della sfera ($r > R$), il potenziale si comporta come se le cariche fossero concentrate tutte al centro della sfera.

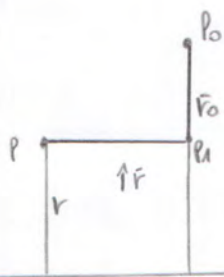
↳ notare che il potenziale per l'int. della sfera va come r^2 (coerente con la relazione $\vec{E} = -\text{grad} V$), in quanto è l'integrale del campo, che va come r .

• Potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo, indefinito, uniformemente carico:

$\lambda \rightarrow$ densità lineare di cariche $r \rightarrow$ distanza di P dal filo $r_0 \rightarrow$ distanza di P_0 dal filo

→ scegliamo il punto P_0 in una posizione finita dello spazio (non all'infinito), in quanto il filo è indefinito.

→ calcoliamo la differenza di potenziale tra P e P_0 scegliendo il percorso: $\overline{PP_0} = \overline{PP_1} \cup \overline{P_1P_0}$, come da figura:



$$V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_{\text{filo}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{r} \quad \hat{r} \rightarrow \text{direzione perpendicolare al filo}$$

$$V_P = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{il primo integrale è } \phi \text{ in quanto il campo elettrostatico } \vec{E} \text{ è, in tutti i punti appartenenti al percorso } \overline{PP_1}, \text{ perpendicolare, per cui il prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ è nullo lungo tutto il tratto})$$

$$V_P = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left| \frac{r_0}{r} \right|$$

LA SUPERFICIE DI UN CONDOTTORE È EQUIPOTENZIALE:

34

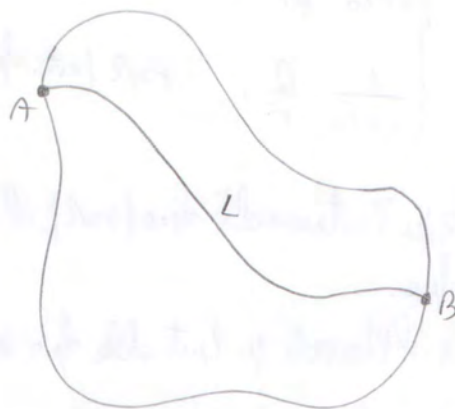
• Consideriamo due punti A e B sulla superficie di un conduttore ed una linea L , interna al conduttore, che li unisce:

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{E} = 0 \text{ per tutti i punti interni al} \\ \text{conduttore} \end{array} \right.$$

$$V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B \quad (\text{l'integrale di } \phi \text{ è una costante})$$

Quindi:

I punti della superficie di un conduttore sono allo stesso potenziale



EQUAZIONE DI POISSON

Vogliamo trovare una relazione differenziale che colleghi il potenziale elettrostatico in un p.to con la densità di carica volumica esistente in quel punto:

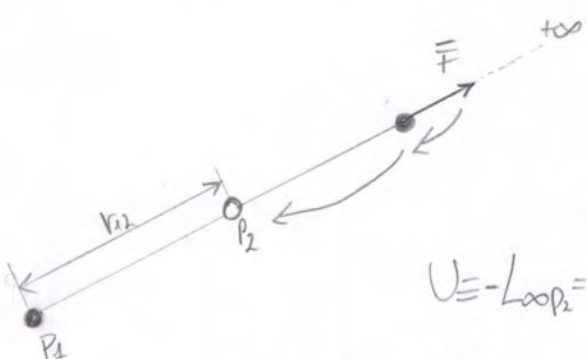
$$\vec{E} = (-\text{grad } V) \rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{div}(-\text{grad } V) = \rho/\epsilon_0 \rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ che è}$$

detta equazione di Poisson

Tempe delle conservative del camp elettrostatico è possibile definire un'energia potenziale legata ad esso. Per capire meglio il concetto partiamo come esempio il camp gravitazionale: portando una molla ad un certo stato, ne acquista un'energia potenziale $U = m \cdot g \cdot h$. Tale energia è data dal lavoro svolto per portare la molla dalle posizioni iniziali (corrispondente al caso della molla che genera il camp gravitazionale) all'ultimo stato. Analogamente, una carica q immersa in un camp elettrostatico, ne viene portata dalle posizioni ∞ in un certo punto P a distanza r dalla carica che genera il camp acquista un'energia elettrostatica che è uguale al lavoro compiuto contro le forze elettriche durante il camp per portare la carica in posizione r . Quindi vale: $U = -L_{\infty P}$.

• Energia elettrostatica di due cariche puntiformi:

Si definisce energia elettrostatica di due cariche puntiformi P_1 e P_2 , data a distanza r_{12} , il lavoro che bisogna compiere contro le forze del camp elettrostatico per portare una delle dall'infinito alla distanza r_{12} dall'altra:

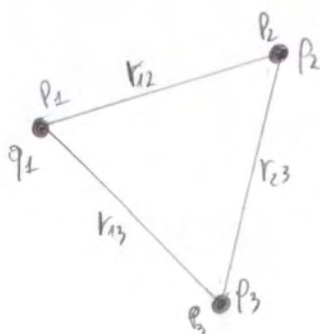


$P_1 \rightarrow$ posizione di P_2
 $L \rightarrow$ lavoro contro le forze repulsive \vec{F} per portare P_2 dall' ∞ alla posizione P_2 , distante r_{12} da P_1

$$U = -L_{\infty P_2} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_1 \cdot P_2}{\ell^2} \cdot d\ell = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot P_1 \cdot P_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{\ell^2} \cdot d\ell =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot P_1 \cdot P_2 \left[-\frac{1}{\ell} \right]_{\infty}^{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{\infty} \right) = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_1 \cdot P_2}{r_{12}}}$$

• Energia elettrostatica di un sistema di N cariche puntiformi:



Consideriamo un sistema di 3 cariche puntiformi. Vogliamo calcolare il lavoro compiuto contro le forze del camp per portare q_2 dall'infinito alla posizione P_2 , successivamente, per portare q_3 dall'infinito nella posizione P_3 . Nel I° caso abbiamo:

$$-L_{\infty P_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_1 \cdot P_2}{r_{12}}$$

Nel II° caso bisogna tener conto del lavoro compiuto contro le forze del camp generato sia da P_1 che da P_2 :

$$-L_{\infty P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_1 \cdot P_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P_2 \cdot P_3}{r_{23}} \Rightarrow$$

Portanto, per un sistema di cariche puntiformi l'energia elettrostatica è: 36

$$U \equiv -L_{\infty p1} - L_{\infty p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Questo risultato può essere generalizzato ad N cariche puntiformi:

$$U = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}}$$

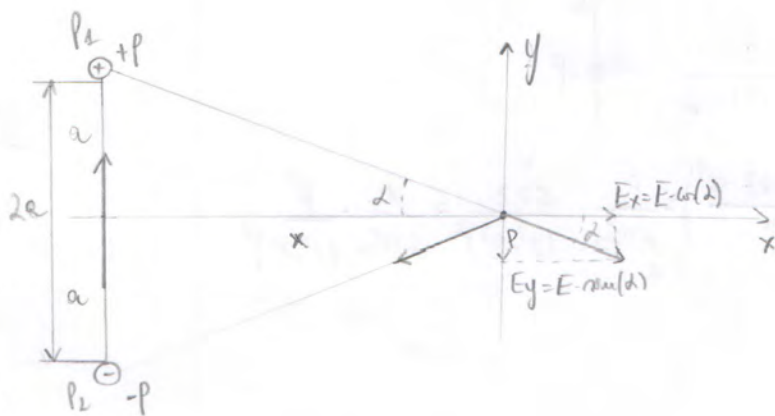
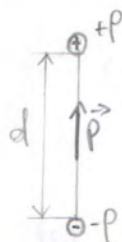
• Esprimere dell'energia elettrostatica in funzione del potenziale elettrostatico:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}} \longrightarrow U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \xrightarrow{V_i}$$

$V_i \rightarrow$ potenziale elettrostatico generato da tutte le cariche puntiformi, eccetto le i -esime, nel punto dove è presente la carica i -esima. Per cui:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot V_i$$

- Si definisce dipolo elettrico un sistema di due cariche puntiformi, aventi lo stesso valore, ma di segno contrario, poste rispettivamente a distanza d .
- Su un dipolo elettrico è possibile definire un momento di dipolo come il vettore \vec{p} avente:
 - modulo pari a $q \cdot d \Rightarrow |\vec{p}| = q \cdot d$ (C.m)
 - direzione delle congiungenti tra le due cariche
 - verso dalle cariche negative e quelle positive
- calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti del suo asse:



- Per la sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico nel p.to P è la somma dei campi elettrostatici dovuti alle cariche positive ($\vec{E}^{(+)}$) e alle cariche negative ($\vec{E}^{(-)}$):

$$\vec{E}_P = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \text{L'operazione vettoriale si ridurrà alle sue componenti cartesiane:}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{Px} = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \text{ (per simmetria)} \\ \vec{E}_{Py} = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$

Perciò il campo elettrostatico generato dal dipolo elettrico nel p.to P è tutto diretto lungo l'asse delle y:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \vec{E}_y \cdot \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = |\vec{E}_y^{(+)}| + |\vec{E}_y^{(-)}|, |\vec{E}_y^{(+)}| = |\vec{E}_y^{(-)}| = |\vec{E}^{(+)}| \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \vec{p}_1 P = \vec{p}_2 P = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\vec{E}_y^{(+)} = \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{array} \right. \Rightarrow E_y^{(+)} = E_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{x^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y}$$

$$|\vec{E}_{Py}| = 2 \cdot |\vec{E}^{(+)}| \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot p \cdot a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y}$$

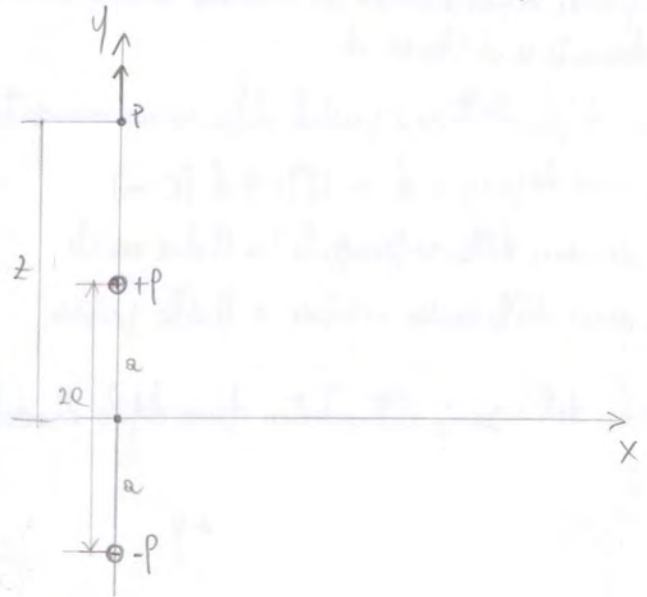
Questo risultato può essere espresso in termini del momento di dipolo \vec{p} :

$$|\vec{E}_{Py}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \vec{p} = 2 \cdot p \cdot \hat{y} \quad \left| \begin{array}{l} \text{per } x \gg 2a \text{ (e grande distanza dal dipolo elettrico):} \\ \vec{E}_{Py} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{x^3} \end{array} \right.$$

- Calcolo del campo elettrostatico di un dipolo elementare nei punti della retta delle due cariche, esternamente ad esse:

38

$$\vec{E} = \vec{E}^{(+)} + \vec{E}^{(-)} \quad \begin{cases} \vec{E}_x = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} = 0 \\ \vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \end{cases}$$



$$\vec{E}_y^{(+)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z-a)^2} \hat{y} \quad \vec{E}_y^{(-)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{(z+a)^2} \hat{y}$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{|q|}{(z-a)^2} - \frac{|q|}{(z+a)^2} \right] \hat{y}$$

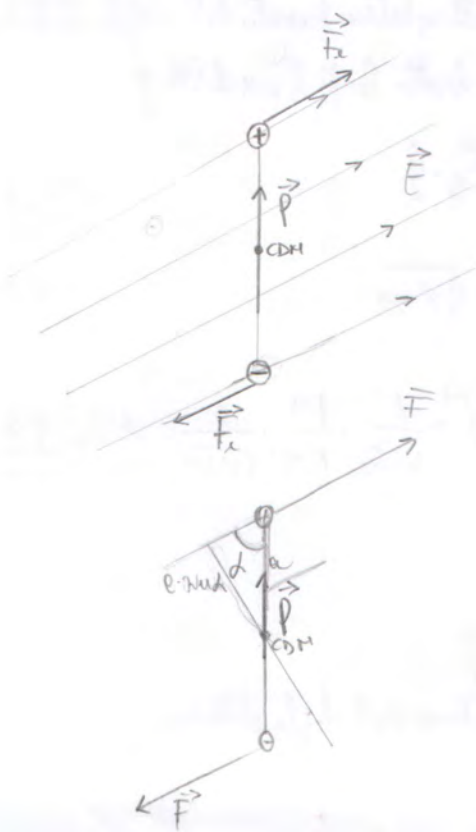
$$\Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(z+a)^2 - (z-a)^2}{(z-a)^2(z+a)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(z^2+2az+a^2 - z^2+2az-a^2)}{(z-a)^2(z+a)^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4az}{(z^2-a^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{(z^2-a^2)^2}$$

per $z \gg a$:

$$\vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{z^3}$$

- Comportamento di un dipolo elettrico quando questo è immerso in un campo elettrico: momento delle forze relative ad un dipolo:

Immergiamo un dipolo in un campo elettrico uniforme:



Sulle cariche del dipolo agisce una forza elettrica \vec{F} (dovuta alla presenza del campo elettrico). \vec{F} rel, in modulo, $\vec{E} \cdot q$. Tali forze hanno ugual modulo ma direzione opposta. Due forze centrali con punti caratteristici non definiti: coppia di forze. Possiamo calcolare su una coppia di forze il momento meccanico τ , rispetto a qualsiasi punto.

Calcolo τ rispetto al COM.

$d \rightarrow$ angolo che \vec{p} forma con la direzione del campo elettrico
e. mod \rightarrow braccio delle forze (misurato a riparo del 1° Teorema sul il) su dell'angolo opposto

$$\tau = \vec{F} \cdot a \cdot \sin(d)$$

Applicando lo stesso alle forze, entrambi i momenti sono entrati al perno del pfflo, e quindi vanno sommati:

$$\tau = 2 \cdot q \cdot \sin(d) \cdot \vec{F} = 2 \cdot q \cdot \sin(d) \cdot p \cdot \vec{E} = \boxed{2 \cdot q \cdot p \cdot \vec{E} \cdot \sin(d)} \Rightarrow$$

$\gamma = \vec{p} \cdot \vec{E} \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{\gamma = p \wedge E}$ tale relazione vale anche se il campo non è uniforme. 39

Il doppio note finché \vec{p} non è parallelo alla direzione del campo elettrico, o perpendicolare.

- Un condensatore è un sistema di due conduttori tra i quali esiste un'induzione elettrostatica costante. Per tali sistemi, il valore assunto dalla carica Q dell'uno o dell'altro armatura è proporzionale alla differenza di potenziale ΔV tra le armature stesse: il rapporto tra Q e ΔV è costante. La costante che esprime il condensatore proprio il rapporto tra Q e $|\Delta V|$:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \Rightarrow Q = C \cdot |\Delta V| \quad C = \frac{\text{Coulomb}}{\text{volt}} = F (\text{Farad}) \quad 1F = \frac{1C}{1V}$$

La costante dipende dalle geometrie del condensatore e dall'eventuale dielettrico presente tra le armature.

- Energia elettrostatica di un condensatore

$U = -L$ (energia potenziale = - lavoro per spostare la carica contro le forze del campo) per campi conservativi

calcoliamo il lavoro necessario per trasferire una carica $+Q$ da un'armatura all'altra, partendo dalle armature in cui il condensatore è scarico.

$V = V(t) \rightarrow$ diff. di potenziale tra le armature $Q = Q(t) \rightarrow$ carica sulle armature per un dato $t \rightarrow V = V(Q) = +Q/P$

$$dL = dP \cdot V \Big|_{C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}} \Rightarrow dL = dP \cdot \frac{Q}{C} \quad \left(\text{lavoro per spostare una carica elementare } dq \text{ da un'armatura all'altra} \right)$$

$$L = \int_0^Q dL = \frac{1}{C} \cdot \int_0^Q q \cdot dP = \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \quad \left(\text{lavoro per spostare l'intera carica } Q \right)$$

$$|U| = |L| \Rightarrow U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \cdot \Delta V} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \Delta V \cdot Q = \boxed{\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta V}$$

$$U = \frac{1}{2C} \cdot Q^2 \Big|_{C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow Q = C \cdot \Delta V} \Rightarrow U = \frac{(C \cdot \Delta V)^2}{2C} = \frac{C \cdot \Delta V^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot C \cdot \Delta V^2}$$

ANALISI DI ALCUNE TIPOLOGIE DI CONDENSATORI COMUNEMENTE DIFFUSE

Veniamo di seguito a riportare le espressioni di alcune particolari tipologie di condensatori comuni. Per ognuno di essi indichiamo il calcolo di alcune grandezze fondamentali:

- Differenza di potenziale tra le armature: la ΔV viene calcolata come: $\Delta V = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$, L qualsiasi percorso chiuso tra le armature
- Capacità: $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$
- Energia elettrostatica: questa viene calcolata come l'integrale delle densità di energia $U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_V E^2 dV$

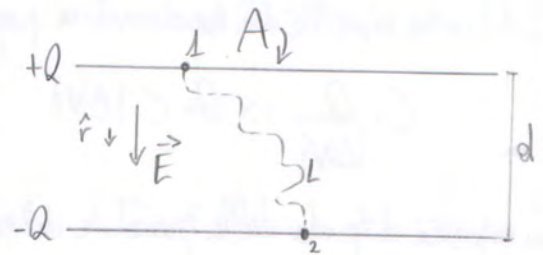
① Condensatore piano:

Un condensatore piano è costituito da due armature piane parallele di area A , porte a distanza d . Sono $+Q$ e $-Q$ le cariche sulle armature:

• calcolo delle differenze di potenziale:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{r} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot \hat{r}$$

$$|\Delta V| = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d$$



• calcolo della capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

da notare che questo è un caso ideale, nel quale non sono assolutamente trascurati gli effetti di bordo. Lo può essere accettabile in certi casi se si considerano armature piane: $\sqrt{A} \gg d$

• calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \frac{Q^2}{\epsilon_0^2} \cdot d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot \int_{\text{spazio}} d\tau$$

(dτ è il volume tra le 2 armature, per il cilindro è $A \cdot d$)

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 L^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 A^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \left(\frac{Q^2}{2C}\right)$$

② Condensatore sferico:

Le armature sono costituite da due superfici sferiche concentriche di raggi R_1 ed R_2 . Sono $+Q$ e $-Q$ le cariche.

Il campo elettrico è radiale e vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} \phi, & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ \phi, & r > R_2 \end{cases}$$

(per ottenere il valore del campo basta applicare il th. di Gauss e) (superfici sferiche concentriche di raggio r , per cui Q è la carica)



• calcolo delle differenze di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

• Calcolo delle capacità:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA: se $R_2 = R_1 + d$, con $d \ll R_1$ (armature molto vicine tra di loro) la capacità sarà:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1(R_1 + d)}{d} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot R_1^2}{d} \approx \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad (\text{capacità del condensatore piano})$$

• Calcolo dell'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \int_{\text{spazio}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right)^2 d\tau = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

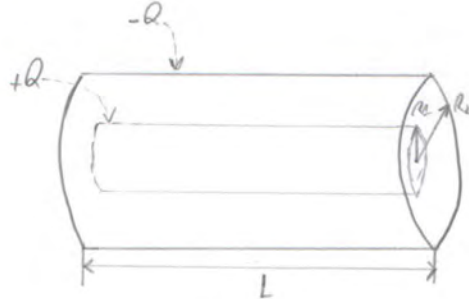
$$= \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right), \text{ che può essere riscritta in funzione delle capacità: } U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = \frac{Q^2}{2 \left(4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)} = \frac{Q^2}{2C}$$

• Condensatore cilindrico:

Le armature sono due superfici cilindriche concentriche coassiali di lunghezza L , aventi raggi R_1 ed R_2 . Sono $+Q$ e $-Q$ le cariche sulle armature e $\lambda = Q/L$ la densità lineare di carica. Nell'ipotesi di trascurare gli effetti di bordo, nelle zone con presenza delle condutture cilindriche il campo elettrico (radiale) si comporta come se le cariche Q fossero distribuite uniformemente condutture lineari λ lungo l'asse del sistema:

$$E = \begin{cases} \phi, & r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r}, & R_1 < r < R_2 \\ \phi, & r > R_2 \end{cases}$$



• Calcolo della differenza di potenziale:

$$|\Delta V| = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \ln \left| \frac{R_1}{R_2} \right|$$

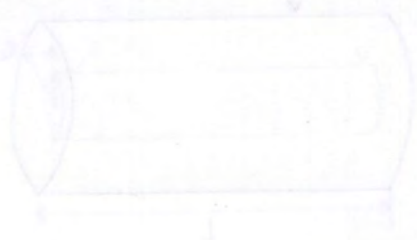
• Calcolo delle capacità: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|}$

Calcolo dell'energia elettrostatica:

43

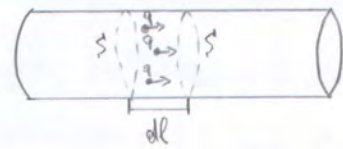
$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{spazio}} E^2 d\tau \rightarrow \text{funzione cilindrica} \rightarrow d\tau = r dr d\theta dz \rightarrow E \cdot d\tau = \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{Q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2 L^2} \cdot \frac{1}{r} dr d\theta dz$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{Q^2}{4\pi^2\epsilon_0^2 L^2} \cdot \frac{1}{r} dr d\theta dz = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{L} \ln \left| \frac{R_2}{R_1} \right|$$



Consideriamo un filo conduttore, di sezione S , attraversato da cariche in moto. Definisce intensità di corrente (I) la carica Q che attraversa la sezione S del conduttore in un tempo dt : $I = \frac{dQ}{dt}$.

$I [A]$ (ampere): Un Coulomb è la carica che, attraversando la sezione di un conduttore in un secondo, genera la corrente di 1 Ampere (1A)



• Definizione della velocità delle cariche in una corrente I :

$q \rightarrow$ valore di q di cariche $v \rightarrow$ velocità (in modulo) delle cariche $dl \rightarrow$ carica che attraversa la sezione S nel tempo dt
 $n \rightarrow$ numero di cariche nel conduttore per unità di volume $n = \frac{m \rho}{S \cdot dl}$

$$dQ = \underbrace{m \cdot S \cdot dl}_{m \rho} \cdot \underbrace{|q|}_{v \cdot dt} = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \cdot dt \Rightarrow dQ = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \cdot dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow I = m \cdot S \cdot v \cdot |q| \Rightarrow v = \frac{I}{m \cdot S \cdot |q|}$$

v.s.: il verso positivo delle correnti è quello delle velocità delle cariche positive. In un conduttore sono le cariche negative a muoversi, quindi il verso delle correnti è contrario al moto delle cariche.

• Legge di corrente:

L'intensità di corrente I è uno scalare, ma può essere descritta da un campo vettoriale $\vec{J}(r, t)$, detto densità di corrente tale che il flusso

del campo \vec{J} attraverso una superficie S fornisce proprio la corrente I : $I(t) = \int_S \vec{J}(r, t) \cdot d\vec{S}$ $\vec{J} \equiv A/m^2$

• Equazione di continuità:

Consideriamo una carica Q distribuita con densità volumica ρ in un volume V delimitato da una superficie chiusa S :

$$Q = \int_V \rho d\tau$$

In un insieme di cariche racchiuso in questo volume, vogliamo dimostrare il principio di conservazione delle cariche: se una parte delle cariche attraversa la superficie S (uscendo dal volume), esiste una corrispondente di cariche all'interno del volume V che è proprio uguale alle cariche uscite da S . Supponiamo che nel tempo dt le cariche Q subiscano, all'interno di V , una variazione $dQ = -d \left(\int_V \rho d\tau \right)$,

le cariche uscite (la variazione è negativa) dalla superficie S vale:

$$dQ_{usc} = I \cdot dt = dt \cdot \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{applicando il t.h. delle divergenze vale: } \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

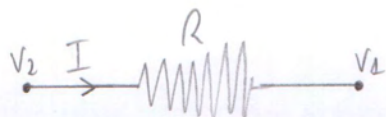
$$\Rightarrow \text{facendo: } -d \left(\int_V \rho d\tau \right) = dt \cdot \int_V \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow -\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho d\tau \right) = \int_V \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow$$

\Rightarrow è possibile portare la densità sotto il segno di integrale dato che la superficie è costante e quindi la sua misura non dipende dal tempo:

$$\int_V -\frac{d}{dt} \rho d\tau = \int_V \text{div} \vec{J} \cdot d\tau \Rightarrow \text{div} \vec{J} \cdot d\tau + \frac{1}{dt} \rho d\tau = 0, \text{ detta equazione di continuità}$$

• Leggi di Ohm:

II^e:
 $\Delta V = R \cdot I$



45

$\Delta V = V_2 - V_1$ $R \rightarrow$ resistenza del tratto di filo conduttore, espressa in Ω (ohm)

II^e: La resistenza di un conduttore filiforme di lunghezza L e sezione S vale:

$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$ | $\rho \rightarrow$ resistenza specifica o resistività del materiale conduttore ($\frac{\Omega \cdot m^2}{m} = \Omega \cdot m$)
 $S \rightarrow$ sezione del conduttore $L \rightarrow$ lunghezza del conduttore

• Effetto Joule:

Il passaggio di corrente attraverso una resistenza R provoca una dissipazione d'energia. La potenza dissipata vale:

$$P = \Delta V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Introduzione al campo magnetico

- In un punto P dello spazio è presente un campo di induzione magnetica \vec{B} se, in una carica puntiforme q , che si muove in P con velocità \vec{v} , si esercita una forza \vec{F} del tipo: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$, chiamata forza di Lorentz. Tale forza è perpendicolare alla velocità \vec{v} , per cui non ne altera il modulo, ma solo la direzione: per tale motivo la forza di Lorentz è detta di tipo deflettente. Le dimensioni fisiche di \vec{B} sono:

$$[B] = \frac{[F]}{[q] \cdot [v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \text{ (tesla)}, \text{ oppure } \frac{W}{m^2} \text{ (weber/m}^2\text{)} \quad 1T = 1 \frac{W}{m^2} \quad 1G(Gauss) = 10^{-4}T$$

- Essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità, essa non compie lavoro sulla carica:

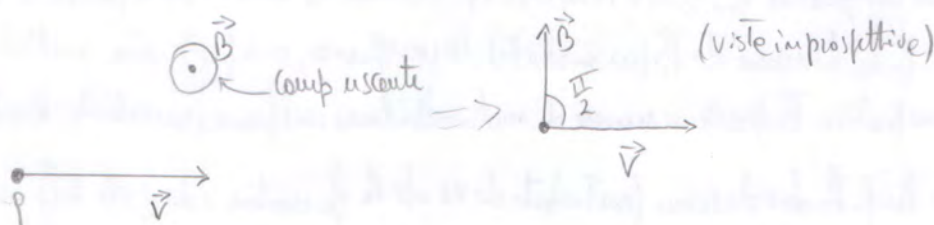
$$L = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}, \text{ per le espressioni del prodotto misto tra tre vettori: } (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

$$\text{vale: } q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = d\vec{l} \wedge q \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B} \text{ (per la proprietà scalare)} = q \cdot d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{B}, \text{ ma } d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \text{ (sono paralleli)}$$

$$\text{per cui: } L = 0 \text{ c.v.d.}$$

- Azione del campo magnetico su una carica in moto iniettata:

Supponiamo di avere una carica q iniettata in un campo magnetico \vec{B} uniforme, uscente dal piano del foglio. La velocità di q è \vec{v} , tale che essa fornisca la direzione del campo un angolo di 90° (\vec{B} e \vec{v} sono perpendicolari):



Le forze di Lorentz che si esercitano sulla carica q è diretta perpendicolarmente al piano individuato da \vec{B} e \vec{v} (con direzione definita dalle regole della mano destra). Essendo l'angolo tra \vec{B} e \vec{v} di 90° :

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(90^\circ) = q \cdot v \cdot B, \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec{a} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} \text{ (costante rispetto al tempo)}$$

nel caso l'accelerazione della carica costante, vedremo che la carica immersa nel campo si muove di moto circolare uniforme con:

$$\bullet \text{ accelerazione centripeta } a_c = \frac{q \cdot v \cdot B}{m}$$

$$\bullet \text{ velocità angolare: } \omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega \cdot R$$

$$\bullet \text{ l'accelerazione centripeta può anche essere espressa come } a_c = \frac{v^2}{R}, \text{ ed equando:}$$

$$a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{q \cdot B}{m} = \frac{v}{R} \Rightarrow \left[R = \frac{v \cdot m}{q \cdot B} \right], \text{ per cui: } v = \omega \cdot R \Rightarrow v = \omega \cdot \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \Rightarrow \omega = \frac{q \cdot B}{m}$$

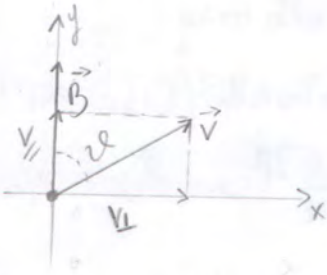
$$\cdot T(\text{periodo}) = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

47

4. In definitiva possiamo dire che una carica q spinta in un camp magnetico \vec{B} con velocità perpendicolare a \vec{B} si muove con una Traiettoria circolare lungo il verso perpendicolare a quello individuato da \vec{v} e \vec{B} , più precisamente di moto circolare uniforme, con:

$$r_c = \frac{p \cdot v \cdot B}{m} (\text{accelerazione centripeta}) \quad R = \frac{V \cdot m}{q \cdot B} (\text{raggio}) \quad \omega = \frac{q \cdot B}{m} (\text{velocità angolare}) \quad T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} (\text{periodo})$$

- Supponiamo ora che la carica q venga immessa nel camp magnetico con una velocità \vec{v} che forma l'angolo con la direzione del camp magnetico \vec{B} :



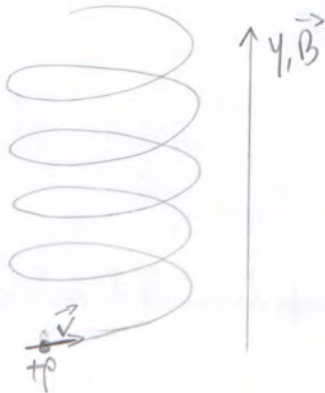
nella carica q opera la forza di Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

però sempre \vec{v} nelle sue componenti interviene:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad \left| \begin{array}{l} v_{\parallel} \rightarrow \text{componente parallela al camp magnetico } \vec{B} \\ v_{\perp} \rightarrow \text{componente perpendicolare al camp magnetico } \vec{B} \end{array} \right.$$

Il problema può quindi essere scomposto in due parti:

- ① Contributo dovuto alle componenti v_{\perp} , $v_{\perp} = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) = v_x$. La particella ruota nel piano ortogonale a \vec{B}
- $$R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot v \cdot \sin \alpha}{q \cdot B} (\text{già scritto detto in precedenza})$$
- ② Contributo dovuto alle componenti v_{\parallel} , $v_{\parallel} = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = v_y$. Essendo v_{\parallel} in direzione parallela al camp, la \vec{F} di Lorentz è nulla lungo la direzione di \vec{B} (in modulo). In conseguenza, una particella immessa con velocità v parallela al camp magnetico \vec{B} , parte a muoversi di moto rettilineo uniforme, con velocità \vec{v} , costante.
- la combinazione dei moti lungo le due direzioni (contributo di v_{\perp} che fa ruotare e di v_{\parallel} che fa traslare) fa muovere la carica con una Traiettoria elicoidale:



$$P = v_{\parallel} \cdot T, T = \frac{2\pi m}{q \cdot B} (\text{periodo dell'elica})$$

N.B.: Come già detto, il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz per spostare una carica per una porzione P ed una porzione Q è dunque nullo: $L_{LQ} = 0$. Per il th. dell'energia cinetica si ha: $L_{LQ} = E_Q - E_P$, da cui si deduce che l'energia cinetica della massa puntiforme m che trasporta la carica q rimane costante. Pertanto, il camp di ind. magnetico \vec{B} non modifica il modulo della velocità della carica, ma ne varia la direzione. Poiché il camp \vec{B} non accelera la carica, ma solo la dirige, soltanto.

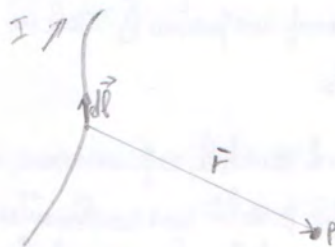
1^a FORMULA DI LAPLACE

Consideriamo una corrente stazionaria I che fluisce in un filo conduttore di lunghezza L . Se $d\vec{\ell}$ un elemento di filo orientato come la corrente, l'elemento di corrente $I d\vec{\ell}$ produce nel punto P un campo magnetico elementare $d\vec{B}$ dato dalla relazione:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$\mu_0 \rightarrow$ permeabilità magnetica del vuoto,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{Am}$$



la relazione è detta 1^a formula di Laplace.

Integrando $d\vec{B}$ su tutto il filo si ottiene l'espressione del campo magnetico \vec{B} in P dovuto alla corrente che circola in tutto il filo.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}, \text{ dove sotto il segno di } \int \text{ formula di Laplace in forma integrale}$$

APPLICAZIONI DELLA 1^a FORMULA DI LAPLACE:

Campo di induzione magnetica prodotto da un filo e forme di arco di circonferenza, percorsi da corrente, nel suo centro:

Consideriamo un tratto di filo e forme di arco di circonferenza di raggio R , con centro O , percorsi da una corrente I . Calcoliamo il campo di induzione magnetica \vec{B} nel centro O .

$$d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \left| \begin{array}{l} d\vec{\ell} \perp \vec{r} \\ |\vec{r}| = R \\ d\vec{\ell} = \vec{r} d\ell \end{array} \right. \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R d\ell \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{R^3} \Rightarrow$$



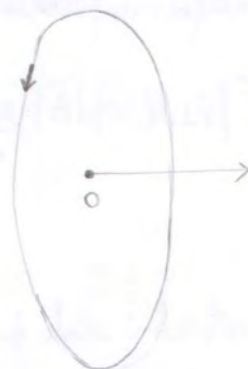
$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} \quad (\text{camp. elementare in } O)$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int d\ell \Rightarrow |\vec{B}| = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot \Delta} \quad (\text{camp. totale in } O)$$

Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorsi da corrente, nel suo centro:

Possiamo calcolare il campo elementare $d\vec{B}$ calcolato in precedenza:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R}; \text{ poche volte integriamo su tutte le circonferenze, ovvero da } \phi \text{ a } 2\pi:$$



$$|\vec{B}| = \int d\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\ell}{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot 2\pi R = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

- Campo di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo finito, percorso da corrente: 4P

$\Delta \rightarrow$ angolo tra \vec{r} ed \vec{x}

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{x} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2}$$

, con direzione \perp al piano individuato da $d\vec{x}$ ed \vec{r} verso entente nel senso del b.p.f. Per ottenere il campo magnetico \vec{B} Totale in P, devo integrare $d\vec{B}$ su tutto il filo.

$\vec{B} = \int_{\text{filo}} d\vec{B} \rightarrow$ effettuo un cambio di variabile, scegliendo come variabile di integrazione l'angolo β scelto come complementare di Δ ed esprimo tutte le variabili in funzione di β :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dx \sin(\alpha)}{r^2} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = \pi - \beta \\ R = r \sin \beta \Rightarrow r = \frac{R}{\sin \beta} \\ x = R \cot \beta \\ dx = R \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \beta} \right) d\beta = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \end{array} \right. \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} \cdot d\beta \cdot \sin(\pi - \beta)}{\left(\frac{R}{\sin \beta} \right)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-\frac{R}{\sin^2 \beta} \cdot d\beta \cdot \sin(\pi - \beta)}{\frac{R^2}{\sin^2 \beta}} =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin(\pi - \beta)}{R} d\beta = \left| \sin(\pi - \beta) = \sin(\beta) \Rightarrow -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta \right.$$

$$|\vec{B}_{\text{Tot}}| = \int_{\pi - \vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{R} d\beta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[-\cos(\beta) \right]_{\pi - \vartheta_2}^{\vartheta_1} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (-\cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Se il p.to P è nel tratto del filo rettilineo: $B = \lim_{R \rightarrow \phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos(\phi) + \cos(\phi)) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \infty$. Il campo diverge in P.

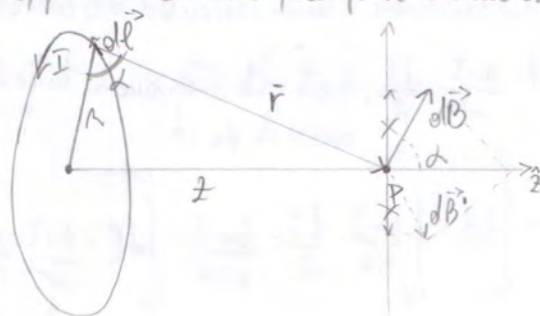
Se il p.to P è sulle rette del tratto di filo, i vettori $d\vec{B}$ ed \vec{r} sono antiparalleli, quindi $d\vec{B} \wedge \vec{r} = \phi$ e vale per ogni $d\vec{B}$ nel tratto di filo, per cui: $d\vec{B} = \phi, \forall d\vec{B} \in L$

Il campo è nullo in P.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \quad \left| \begin{array}{l} \vartheta_1 = \pi \\ \vartheta_2 = \phi \end{array} \right. = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos(\pi) + \cos(\phi)) = \phi$$

- Campo di induzione magnetica prodotto da una spira circolare, percorso da corrente, nel punto del suo asse:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad |\vec{r}| \perp d\vec{l} \Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



Le componenti lungo le verticali si elidono per le simmetrie

del problema. Resta solo la componente lungo z: $dB_z = |d\vec{B}| \cdot \cos(\alpha) \quad R = r \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{R}{r} \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r}$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot dl \quad B_z = \int_{\text{spira}} dB_z = \int_{\text{spira}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot \int_{\text{spira}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R}{r^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{r^3} \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\vec{B}_z| = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

50

- Camp di induzione magnetica prodotto da un filo rettilineo indefinito, preso da cune: legge di Biot-Savart:

Possiamo considerare il filo indefinito come un caso particolare di un filo di lunghezza L , con $L \rightarrow +\infty$. Per tale configurazione

avremo, il camp B in un punto P vale: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cdot (\cos(0) + \cos(\pi)) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, con direzione \perp e

parallela del piano formato dal filo e dal \vec{r} . Poiché P è un punto arbitrario delle regole delle derivazioni. Tale relazione prende il

nome di legge di Biot-Savart.

• NOTAZIONI SU CAMPI CENTRALI ED ANGIOLARI:

- Ogni camp centrale è conservativo, quindi è irrotazionale. Esempio: camp elettrostatico:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{e} = \phi \quad \text{rot}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

- Ogni camp angolare è solenoidale. Esempio: camp magnetico

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

• II^a FORMULA DI LAPLACE

$$\text{Per le linee di forza vale: } d\vec{F} = d\rho \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ I = \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow d\rho = I \cdot dt \end{array} \right. \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot dt \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = I \cdot d\vec{r} \wedge \vec{B}$$

$d\vec{F} = I \cdot d\vec{r} \wedge \vec{B}$ è definita II^a formula di Laplace in forme differenziali

$\vec{F} = I \cdot \int_L d\vec{r} \wedge \vec{B}$ è definita II^a formula di Laplace in forme integrali

\vec{F} è la forza che agisce su un elemento di filo $d\vec{r}$ orientato come la corrente che lo attraversa

NOTA BENE:

• La I^a F.D.L. permette di calcolare il camp magnetico \vec{B} (in forme differenziali) o il camp B (in forme integrali) agente su un f.to percorso da una corrente fili-forma attraversato da corrente. Il camp B è dovuto all'insieme di correnti nel conduttore.

• La II^a F.D.L. permette di calcolare la forza che agisce su un elemento di filo (in forme differenziali) o sul filo (in forme integrali) attraversato da corrente ed immerso in un camp magnetico

• Momento di dipolo esercito da una spirale piana di corrente

Si definisce momento di dipolo di una spirale piana attraversata da una corrente I il vettore: $\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$, dove \vec{S} è il vettore esercito alla superficie S della spirale, diretto perpendicolarmente alla spirale, con verso dato dal p.l. delle mano destra facendo ruotare richiudendo il verso delle corrente.

• Momento meccanico agente su una spirale rettangolare piana di corrente ed immersa in un campo magnetico uniforme:

Per le II^e formule di Laplace:

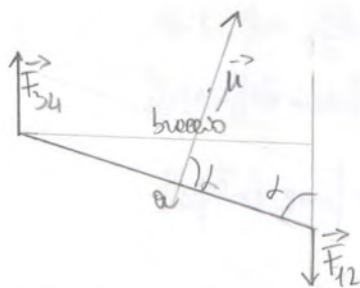
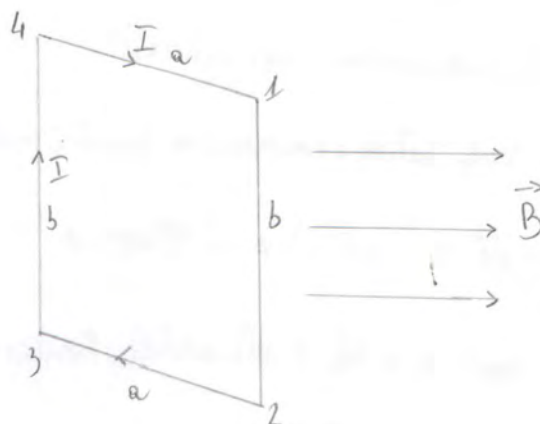
$$\vec{F}_{23} = I (\vec{z3}) \wedge \vec{B}, \quad \vec{F}_{14} = I (\vec{14}) \wedge \vec{B}$$

Essi hanno la direzione dell'asse di rotazione, lo stesso modulo e versi contrari: costituiscono una coppia di forze e braccio nullo, quindi non sviluppano alcuna rotazione delle spirale

Sui lati $\vec{12}$ e $\vec{34}$ (di lunghezza b) agiscono le forze:

$$\vec{F}_{12} = I (\vec{12}) \wedge \vec{B}, \quad \vec{F}_{34} = I (\vec{34}) \wedge \vec{B}$$

che hanno lo stesso modulo $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{34}| = I \cdot b \cdot B$ (il campo è \perp al lato b , quindi $\sin(\alpha) = \sin(90^\circ) = 1$), verso opposti e un braccio (non nullo sulle stesse rette). Costituiscono una coppia di forze di braccio $e \cdot \sin(\alpha)$.



$$\text{braccio} = a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\gamma = F_{12} \cdot \text{braccio} = I \cdot e \cdot b \cdot B \cdot \sin(\alpha) \quad \left| \begin{array}{l} F_{12} = I \cdot b \cdot B \\ \text{braccio} = e \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right.$$

γ può essere espresso come:

$$\gamma = \vec{\mu} \wedge \vec{B}, \text{ in modulo: } |\gamma| = I \cdot e \cdot b \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\gamma| = |\vec{\mu} \wedge \vec{B}| = \boxed{I \cdot e \cdot b} \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

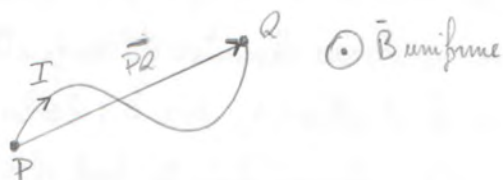
$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S}$ α è anche l'angolo compreso tra $\vec{\mu}$ e \vec{B}

La direzione di $\vec{\mu}$ è perpendicolare alla superficie, proprio come in fig.,
per cui le 2 espressioni sono equivalenti.

Forse agente su un tratto di filo, percorso da corrente, ed immerso in un campo magnetico uniforme:

Consideriamo un tratto di conduttore rigido, di estremi P e Q, attraversato da corrente I, nel verso che va da P a Q. Il campo \vec{B} in cui è immerso è uniforme. Per la II^a formula di Laplace la forza agente sul filo è:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} \rightarrow \vec{F} = I \cdot \left(\int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B}$$



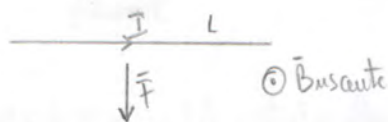
dove si è fatto mettere in evidenza che il campo \vec{B} , essendo uniforme. L'integrale non è nient'altro che il vettore orientato da P a Q, perciò:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

Quindi, la forza che agisce su un conduttore rigido non dipende né dalla forma, né dalle sue dimensioni, né dal vettore che nasce ai suoi estremi, orientato come il verso della corrente. In particolare se il filo è rettilineo, vale:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$$

Consideriamo il particolare caso in cui il tratto di filo rettilineo è ortogonale al campo \vec{B} uniforme:



Forse agente su un filo chiuso, percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico uniforme.

Supponiamo di avere un filo conduttore chiuso, e forme di spira, attraversato da una corrente stazionaria I. Per quanto detto prima, la forza agente sul filo vale:

$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \cdot \left(\int_{\text{filo}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$



L'integrale è nullo (intendiamo vettoriale) su una linea chiusa.

Concludo che la risultante della forza esterna agente sulle spire è nulla. Ne consegue che il cor. non subisce alcuna accelerazione: ciò può non escludere la possibilità di avere un momento torcente.

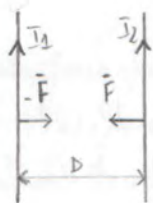
Interazione tra due fili paralleli e indefiniti, percorsi da corrente

Calcolando i campi ed induzioni magnetiche generati dai due fili l'uno sull'altro ed applicando la II^a formula di Laplace si dedurrà la forza per unità di lunghezza agente sui due fili.

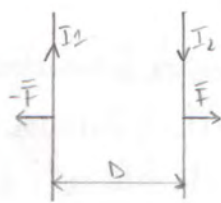
Le due spire sono poste sotto l'azione delle correnti hanno lo stesso verso e si respingono se le correnti hanno verso contrario.

Il modulo delle forze di interazione per unità di lunghezza vale:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi D}$$



Attrazione



Repulsione

• **Prova motrice:** calcolo di un campo vettoriale lungo una linea:

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} e una linea infinitesima $d\vec{l}$ immersa in esso.

Affatto perché di lunghezza infinitesima, l'elemento di linea può ritenersi rettilineo, con la sua direzione individuata dal vettore \hat{r} quindi: $d\vec{l} = dl \cdot \hat{r}$.

Definiamo ora l'elementare del campo vettoriale \vec{A} lungo una linea orientata $d\vec{l}$ le punti \vec{A} :

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A \cdot dl \cdot \cos(\alpha), \text{ dove } \vec{A} \text{ è il valore assunto dal campo vettoriale nel punto in cui passa } d\vec{l} \text{ e } \alpha \text{ è l'angolo formato da } \vec{A} \text{ e } d\vec{l}.$$

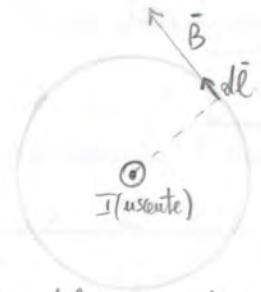
Sommando le espressioni elementari lungo gli elementi di curva elementari otteniamo le espressioni in tutte le linee:

$$C_A(L) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

• Calcolo di un campo di induzione magnetica \vec{B} generato da una corrente I nel centro di una circonferenza di raggio R , con I perpendicolare al piano in cui è reale:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \quad \left(\text{legge di Biot-Savart} \right) \quad C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot \oint_L dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

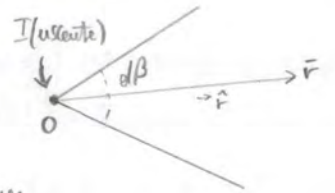
N.B.: il vettore campo magnetico è parallelo al vettore $d\vec{l}$ (vedi campo di Biot-Savart), per cui $\cos(\alpha) = 1$.



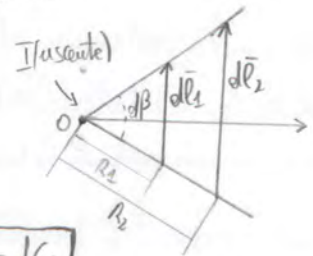
• **Teorema di Ampere in forme integrate**

Consideriamo una corrente rettilinea infinita I , e nel punto ad essa ortogonale, e fuori del punto O , disegniamo una semicirca γ di raggio r (si vede la figura). Intorno alla retta consideriamo un cerchio pieno

$d\vec{B}$, centrata in O . Studieremo ora come si calcola le espressioni elementari del campo \vec{B} generato dalla corrente I lungo le linee elementari dl_1 e dl_2 che sottendono l'angolo $d\beta$, evidenziando 2 particolari situazioni caratterizzate da diversi orientamenti delle linee elementari:



I° CASO: dl_1 e dl_2 perpendicolari alla semicirca γ : $|dl_1| = dl_1 \hat{e}_1$ $|dl_2| = dl_2 \hat{e}_2$



Il campo magnetico è dato da R_1 vale, per la legge di Biot-Savart: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot \hat{e}_1$, per cui:

$$dC_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 \cdot dl_1 \cdot \cos(\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot dl_1 \cdot \cos(\phi) \quad |dl_1| = R_1 \cdot d\beta \Rightarrow dC_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot R_1 \cdot d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta$$

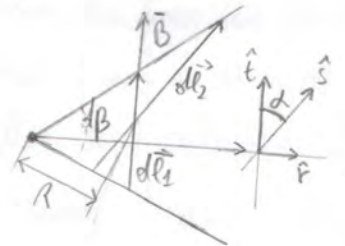
Tale risultato è indipendente dalle distanze R_1 , quindi, applicando la stessa procedura, $dC_1 = dC_2$

II° CASO: dl_1 e dl_2 alla stessa distanza da O , con direzioni diverse: $|dl_1| = dl_1 \hat{e}_1$ $|dl_2| = dl_2 \hat{e}_2$

$$\vec{B} = B \hat{e} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{e} \quad dC_1 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B \cdot dl_1 \cdot \cos(\phi) = B \cdot dl_1$$

$$dC_2 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B \cdot dl_2 \cdot \cos(\alpha) \rightarrow (\hat{e} \cdot \hat{s}) = \cos(\alpha) \quad dl_1 = dl_2 \cdot \cos(\alpha) \quad (dl_1 \text{ è la proiezione di } dl_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dC_2 = B \cdot dl_1 = dC_1 \Rightarrow \boxed{dC_1 = dC_2}$$



Possiamo concludere dai punti espressi che la circuizione del campo magnetico generato dalla corrente I che passa per un conduttore rettilineo (idealmente infinito) lungo due linee infinitesime dl_1 e dl_2 , che sottendono un angolo centrato dove passa il filo, è uguale, se prendiamo i due elementi di linea a distanza R loro che alla stessa distanza, con orientamenti diversi.

Dal tale conclusione, potremo alla dimostrazione vera e propria del teorema.

• Calcoleremo il camp magnetico generato da una corrente I lungo una qualunque linea chiusa L : 54

Anche in questo caso, considereremo due particolari casi:

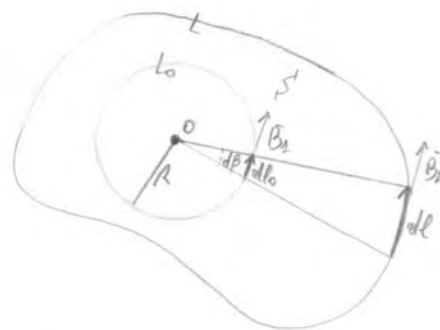
- I° caso: la corrente I è concatenata con la linea L :
 $I \rightarrow$ corrente rettilinea indefinita, perpendicolare al piano del loop ed uscente da esso, concatenata con la linea L
 $L \rightarrow$ linea circolare di raggio R , centrata nel punto O per cui passa I .

$dB \rightarrow$ campo generato da un elemento con vertice in O

$$d\mathbf{B}(\mathbf{dl}) = d\mathbf{B}(\mathbf{dl}_0) \quad \mathbf{B}(L) = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I$$

N.B.: la superficie S può essere vista come l'insieme di infiniti campi uscenti da O , per cui la concatenazione su L è uguale a quella su L_0

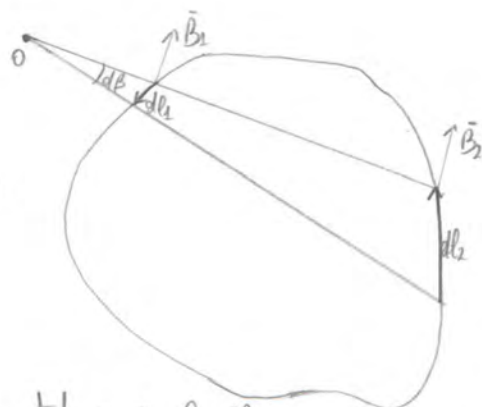
In definitiva: $\mathbf{B}(L) = \mu_0 \cdot I \cdot \text{conc}$



- II° caso: la corrente I non è concatenata con la linea L :

In questo caso le concatenazioni sono comunque uguali in modulo, ma il verso è opposto, in quanto dl_1 e dl_2 sono orientate in verso opposto.

Per cui: $\mathbf{B}(L) = 0$



Tali risultati possono essere estesi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, a più correnti. In tal modo si può enunciarne il Teorema di Ampère, di seguito enunciato:

• Teorema di Ampère:

"La concatenazione del camp magnetico lungo una linea chiusa orientata è uguale alle somme algebriche delle correnti concatenate con la linea moltiplicate per le permeabilità magnetiche nel vuoto:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_{\text{conc}i} \quad \text{dualmente, se la concatenazione (lungo una linea chiusa) è nulla, le somme algebriche delle correnti concatenate alle linee è nulla.}$$

• Teorema di Ampère in forma differenziale:

Consideriamo una densità di corrente \vec{J} . Fissata una linea chiusa L , la corrente concatenata con la linea L è il flusso del camp \vec{B} attraverso una qualunque superficie che si appoggi ad L :

$$\sum_i I_{\text{conc}i} = \oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \text{ per il th. di Ampère: } \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_i I_{\text{conc}i} \Rightarrow \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

per il th. della concatenazione:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{S'} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{S'} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \oint_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

definite una superficie S uguale per entrambi gli integrali, possiamo eguagliare i due integrali:

$$\text{rot } \mathbf{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{teorema di Ampère in} \\ \text{forma differenziale} \end{array} \right)$$

Il th di Ampère in forma differenziale collega il rotore del camp \vec{B} con la densità di corrente in quel punto

IL SOLENOIDE

55

- Il solenoide è costituito da un filo attraversato da una corrente I , avvolto in una superficie cilindrica per una lunghezza l , avendo N spire.

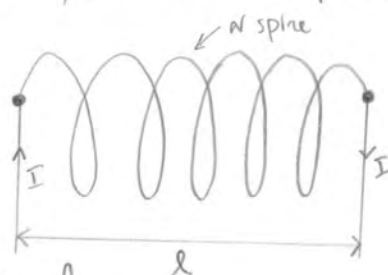
- Calcoliamo il campo magnetico \vec{B} generato dalle correnti che attraversano un solenoide come applicazione del th. di

- Ampere, supponendo che le spire sono molto condensate, e la lunghezza l sia molto grande rispetto alle dimensioni trasversali.

(Tale condizione corrisponde a quelle ideali di solenoide a lunghezza infinita con spire totalmente condensate da formare una superficie cilindrica). In queste situazioni il campo magnetico \vec{B} è nullo all'esterno del solenoide ed è uniforme al suo interno.

- Definiamo: $n = N/l$ (n è il numero di spire per unità di lunghezza)

- Effettueremo un taglio del solenoide con un piano perpendicolare per il suo asse di simmetria e considereremo il rettangolo 1234 applicando a tale percorso il th. di Ampere:



$$\oint_{1234} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

gli integrali sui tratti 23 e 14 sono nulli ed opposti, perciò la loro somma è nulla
- l'integrale sul tratto 34 è nullo in quanto \vec{B} è \perp all'esterno del solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot l$$

Per il th. di Ampere vale: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{conc}} = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I$

equoquando:

$$B \cdot l = \mu_0 \cdot n \cdot l \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \text{ (camp. magnetico all'int. del solenoide)}$$

• Equazioni di Maxwell totali:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad \text{n.b.: tali equazioni sono valide considerando i campi } \vec{B} \text{ ed } \vec{E} \text{ indipendenti tra di loro}$$

• Legge dell'induzione elettromagnetica di Faraday-Neumann-Lenz:

Consideriamo un camp di induzione magnetica \vec{B} in funzione variabile da punto a punto e dipendente del temp. Se L una linea chiusa contenuta nel dominio di \vec{B} . La legge dell'induzione elettromagnetica afferma che la intensità del camp elettromotore \vec{E}_i^{TOT} lungo la linea chiusa L è uguale alla derivata totale rispetto al temp, cambiata di segno, del flusso del camp \vec{B} attraverso una qualunque superficie S che si appiatti alle linee L :

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \rightarrow \varphi_B(t)$$

essendo: $\oint_L \vec{E}_i^{\text{TOT}} = \oint \text{e.m.} (= \text{forse elettromotrice}), \text{ si scrive:}$

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

• È da evidenziare il fatto che, anche se il flusso non è dipendente da una funzione del temp, esso potrebbe variare anche solo perché la linea L è in movimento o si deforma: in tali casi il prodotto scalare $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ varia, e di conseguenza anche il flusso. Una variazione del flusso si ha anche quando \vec{B} non è uniforme nello spazio e la linea L si muove.

Tali considerazioni evidenziano che, in realtà, non è detto che se \vec{B} non è esplicitamente variabile nel temp la f.e.m. lungo L è necessariamente nulla, poiché esistono altri fattori che rendono il flusso variabile.

• Quando la linea L è un filo conduttore chiuso di resistenza R è possibile calcolare la corrente che circola nel filo:

$$\oint \text{e.m.} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow i = \frac{\oint \text{e.m.}}{R} \Rightarrow i = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt} \varphi_B(t)$$

Quando il filo è aperto non vi è una corrente stazionaria, ma è comunque presente una differenza di potenziale ai suoi capi.

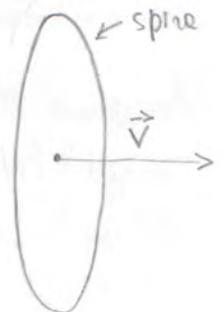
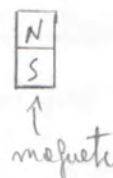
• Note le considerazioni fatte in precedenza sulle molteplicità delle cause che possono produrre la variazione del flusso di \vec{B} , evidenziamo alcuni casi che producono lo stesso effetto delle leggi di F-N-L:

• INDUZIONE DI 1° SPECIE:

Consideriamo un magnete fermo, che genera nello spazio circostante un camp magnetico \vec{B} stazionario ma non uniforme, e una spira conduttrice. Allontaniamo la spira dal magnete con velocità \vec{v} . Si genera nella spira una corrente solo quando la spira è in movimento.

Se si avvicina la spira al magnete la corrente circola nella spira in senso contrario rispetto a quando era allontanata. Ciò può essere spiegato in 2 modi:

• I filamenti contenuti nella spira si muovono con velocità \vec{v} nel camp \vec{B} , perciò, essendo soggetti alle forze di Lorentz prodotte, muovendosi, una differenza di potenziale,



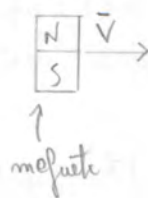
- Quando il camp \vec{B} non uniforme nello spazio, facendo le spine è in moto solo il flusso di \vec{B} attraverso la superficie e cui si applica la spine. C'è dunque, al movimento delle spine, una reversione del flusso di corrente, per le leggi di $\vec{F} = N \cdot \vec{L}$, una fem, reversibile e una volta di una corrente che circola nello spazio. Siamo nelle situazioni in cui il flusso del camp magnetico varia solo che esso è una reversione temporale di \vec{B} . Situazioni in cui vi è un conduttore in moto in un camp magnetico costante nel tempo (ma non necessariamente uniforme nello spazio) sono classificate come fenomeni di induzione elettromagnetica di I° specie.

• INDUZIONE DI II° SPECIE:

Qualmente, sono definiti fenomeni di induzione di II° specie quelli in cui non è il conduttore e muovono, ma le sorgenti del camp, e quindi il camp stesso.

Consideriamo sempre il circuito e le spine del caso precedente. In questo caso, però, la spine è fissa ed è il circuito e muovono con velocità \vec{v} .

Anche in questo caso vi è una fem e quindi una corrente indotta nelle spine. In tale situazione, però, non vi è alcun contrasto con le leggi di Lorentz: la fem indotta dipende dal moto relativo tra i due componenti.



Le leggi dell'induzione elettromagnetica è valida anche nel caso in cui non c'è movimento di nessuno dei due componenti, come nel caso di due spine: se solo sulle prime si fa variare una corrente sensibile nel tempo, tale variazione discreta genera un camp di induzione magnetica sensibile anche esso nel tempo, che è una volta generare un flusso magnetico (variabile) che crea una fem sia nelle spine stesse (fem autoindotte) che nell'altre spine (fem indotte), provocando quindi il processo di corrente indotte.

Ai fini dell'induzione elettromagnetica non è quindi importante sapere su quale moto o modalità avviene la variazione del flusso magnetico nel tempo (può avvenire indistintamente su fenomeni di I° o II° specie): l'importante è individuare le leggi di variazione del flusso nel tempo.

Le modalità per i fenomeni di I° e di II° specie viene messo introducendo le teorie della relatività ristretta di Einstein. Considero al riguardo una spine rettangolare con due lati coincidenti con gli assi x e y , immersa in un camp di induzione magnetica orientatamente lungo x : $B(x) = B_0 x$. La spine si muove con velocità costante $v = x/t$, mantenendo sempre il suo lato coincidente con l'asse x . È possibile derivare il fenomeno e ricavare delle "leggi dell'orologio".

• Descrizione dell'orologio ideale con gli assi x, y, z (l'osservatore l'osservatore): l'orologio vede la spine che si muove e il flusso del camp B che cresce, dato che si muove verso di camp più intenso. Dunque attribuisce la variazione del flusso al moto delle spine.

• Descrizione dell'orologio ideale con le spine: l'orologio vede la spine fissa, ma nota un aumento nel tempo del flusso del camp magnetico attraverso le spine, attribuendo la variazione del flusso alla variazione del camp B nelle spine.

Autoinduzione

Se un solo circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo presenta il fenomeno di induzione elettromagnetica.

Consideriamo un circuito attraversato da una corrente $I(t)$. La corrente genera

un campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$, che è perpendicolare, istante per istante,

a $I(t)$ ed $d\vec{l}$. Vi sarà dunque un flusso del campo \vec{B} , attraverso la superficie S che rappresenta il circuito, che risulta essere stesso proporzionale a $I(t)$:

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = L \cdot I(t)$$



La costante L tra $\Phi_B(t)$ e $I(t)$ è il coefficiente di autoinduzione o semplicemente induttanza. Essa può definirsi come il rapporto fra il flusso magnetico concatenato con il circuito e la corrente che fluisce nel circuito stesso:

$L = \frac{\Phi_B(t)}{I(t)}$ Tale coefficiente dipende esclusivamente dalle geometrie del problema. L'unità di misura di L è:

$$[L] = \frac{[W]}{[A]} = [H] \text{ (Henry)} \quad 1H = \frac{1W}{1A}$$

È possibile scrivere le leggi dell'induzione elettromagnetica utilizzando L :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} (L \cdot I(t)) \Rightarrow \text{fem} = L \cdot \frac{d}{dt} (I(t)) \text{ (legge di autoinduzione elettromagnetica)}$$

Definitiva, in un circuito in rapporto ad una corrente variabile nel tempo.

• Coefficiente di autoinduzione in un solenoide:

Vogliamo calcolare il flusso del campo \vec{B} concatenato con le N spire di un solenoide e, conseguentemente, determinare il coefficiente L che lo mette in relazione con la corrente $I(t)$ che lo attraversa.

\rightarrow n° di spire per unità di lunghezza $n = \frac{N}{l}$, dove N è il numero di spire ed l la lunghezza del solenoide.

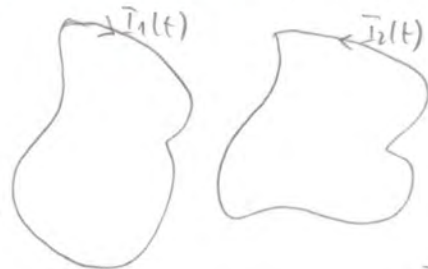
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot n \cdot I = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \Rightarrow \Phi_B(s) = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I \cdot S \Rightarrow \Phi_B^{tot} = N \cdot \Phi_B(s) \Rightarrow \Phi_B = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot I \cdot S \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S}$$

\downarrow flusso concatenato ad una spira \downarrow flusso concatenato ad N spire

Mutua Induzione

Consideriamo due circuiti, mantenuti fermi, attraversati dalle correnti $I_1(t)$ ed $I_2(t)$. Come abbiamo precedentemente visto, la corrente $I_1(t)$ genera un campo di induzione magnetica $\vec{B}_1(t)$ nel suo spazio circostante. Analogamente un flusso $\Phi_2(t)$ concatenato con il secondo circuito, per effetto del campo $\vec{B}_1(t)$ generato da $I_1(t)$.

$\Phi_2(t) = M_{12} \cdot I_1(t)$ $M \rightarrow$ costante di proporzionalità che lega il flusso del campo magnetico attraverso il secondo circuito con la corrente che attraversa il primo circuito (e che genera, quindi, il campo \vec{B}_1)



M è definito come coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti, in particolare tra l'elemento 1 ed elemento 2. 59

La tensione del primo $\varphi_1(t)$ genera una f.e.m. nell'elemento 2 pari a: $\varphi_{u2} = -\frac{d}{dt}(\varphi_2(t)) = -\frac{d}{dt}(M I_1(t)) = -M \frac{d}{dt}(I_1(t))$

In maniera del tutto analoga, anche la corrente $I_2(t)$ genera un campo di induzione magnetica $B_2(t)$, quindi vi sarà un flusso di tale campo concatenato all'elemento 1, che vale: $\varphi_1(t) = M_{21} \cdot I_2(t)$. Si genera una f.e.m. nell'elemento 1 pari a: $\varphi_{u1} = -M_{21} \cdot \frac{d}{dt}(I_2(t))$

Dimostriamo che $M_{12} = M_{21}$, e lo chiamiamo M (coeff. di mutua induzione), quindi:

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = M \cdot I_1(t) \rightarrow \varphi_{u2} = -M \cdot \frac{d}{dt} I_1(t) \\ \varphi_1(t) = M \cdot I_2(t) \rightarrow \varphi_{u1} = -M \cdot \frac{d}{dt} I_2(t) \end{cases} \quad M = \frac{\varphi_2(t)}{I_1(t)} = \frac{\varphi_1(t)}{I_2(t)}$$

N.B.: M dipende dalle geometrie dei circuiti e dalla loro posizione. Si misura in Henry

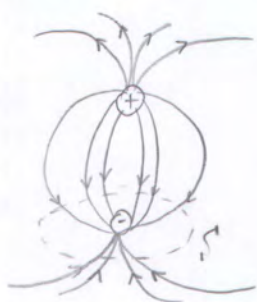


Induzione
mutua

Induzione
reciproca

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (1) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (2) \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & (4) \end{cases} \quad (\text{Considerando } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ indipendenti})$$

- (1) La prima equazione è in pratica l'espressione del teorema di Gauss espresso in forme differenziali. È da notare che la divergenza del campo elettrostatico non è nulla, ma assume un valore pari alla densità di carica in quel punto fatto lo esente dielettrico nel vuoto. Questa relazione differenziale può essere integrata, e pochi linee, considerando una superficie contenente una carica netta (quindi una densità di carica o una carica q) diversa da 0: le linee di campo elettrostatico non sono linee chiuse continue, ma hanno una sorgente e (talvolta) un pozzo. Perciò, per una superficie chiusa, il flusso del campo che la attraversa può essere non nullo, e ad esempio, la sorgente del campo (e quindi delle linee di campo) è interna alla superficie e il pozzo (se presente) all'esterno di essa. Possiamo considerare l'esempio di una superficie che racchiude una delle due cariche di un dipolo elettrico:



in questo caso le linee di campo hanno sorgente nelle cariche positive e pozzo in quelle negative. Attraverso la superficie S che racchiude la carica positiva entrano tutte le linee di campo entranti; però il flusso del campo \vec{E} attraverso S è diverso da 0, in particolare è positivo.

- (2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$: tradotta in termini fisici, essendo le linee di campo magnetiche delle linee chiuse il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo: le linee di forza di \vec{B} non hanno una sorgente o un pozzo, quindi, se la superficie chiusa S è immersa in un campo \vec{B} , le linee di forza attraversano S più volte, con flusso netto attraverso S pari a 0. (tutto ciò che entra è pari a ciò che esce).

- (3) $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$: dice che $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ vuol significare che le linee di forza del campo elettrostatico non formano rotazioni nelle cariche. Infatti, $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}$ è irrotazionale. L'espressione delle componenti di \vec{E} , applicando meccanicamente il th. di Stokes: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0$. Ma che la circolazione in un percorso chiuso di \vec{E} è nulla vuol dire che il lavoro per spostare una carica in un percorso chiuso eseguito dal campo è pari a 0.

- (4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$: parte equazione statica del th. di Ampère, espresso in forme locali. Analogamente al campo elettrico, il campo magnetico \vec{B} genera delle rotazioni in quanto $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (infatti, si vede il comportamento di una carica immersa in un campo magnetico).

Derivate temporale del flusso di un camp vettoriale dipendente, in generale, dallo spazio e del tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} \vec{C} \cdot d\vec{S} + \int_{S(t)} \text{div} \vec{C} \cdot \vec{v} dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{C} d\vec{l}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 superficie evoluta, comp evoluta, comp evoluta,
 comp variabile superficie variabile funzione variabile

Si vuole ricavare la legge dell'induzione elettromagnetica applicando la derivata temporale del flusso di un camp vettoriale come descritto:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_S \text{div} \vec{B} \cdot \vec{v} dS - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \int_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l}$$

$$\text{F.E.M.} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \Rightarrow \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} \quad \left| \oint_{\partial S} \vec{E}_n \cdot d\vec{l} + \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{B} d\vec{l} = \oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} \right.$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Th. di Stokes di I° membro:} \\ \oint_{\partial S} \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{array} \right. \Rightarrow \oint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \oint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

N.B.: l'operatore integrale di I° e di II° membro si semplifica in quanto le rette delle superficie è arbitraria: scegliendo le stesse per entrambi, è possibile esprimere le funzioni interfaccia.

Teorema di Ampere-Maxwell in forme differenziali

Il teorema di Ampere vale solo in condizioni stazionarie. Infatti, partendo dalle sue forme differenziali:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{J} \quad | \quad \text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{J} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{J} = 0$$

Ricordando l'espressione di continuità: $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ si ha che $\text{div} \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ cioè solo in condizioni di stazionarietà.

È ragionevole tentare quindi di modificare il teorema di Ampere in modo che risulti valido anche in casi non stazionari di variabilità nel tempo, quindi in modo che risulti compatibile con l'espressione di continuità (e quindi col principio di conservazione della carica): $\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

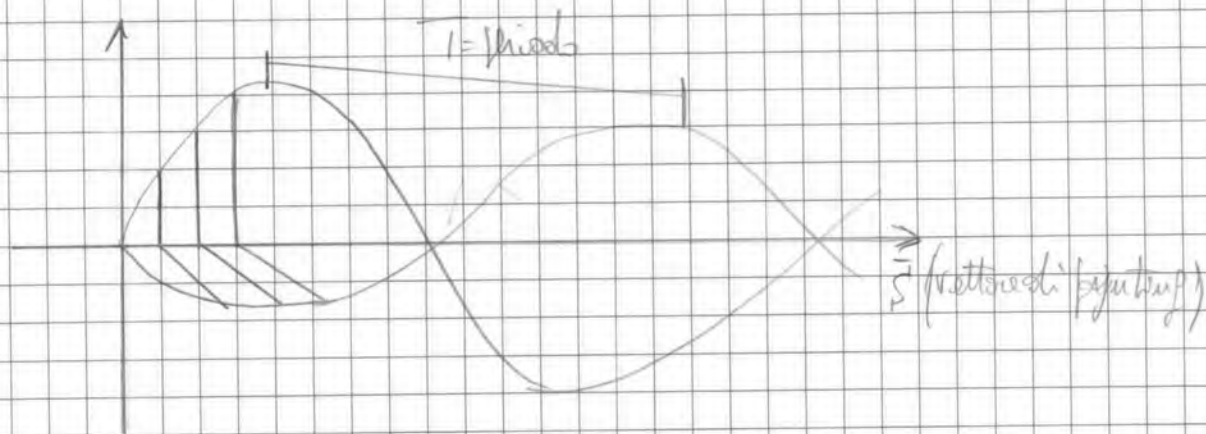
Supponiamo quindi che nel th di Ampere manchi qualcosa: $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X})$, dove \vec{X} è un termine che ha le dimensioni fisiche di \vec{J} . Applicando la div al I° e al II° membro: $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) \Rightarrow \text{div} \vec{J} + \text{div} \vec{X} = 0$

Nel th di Gauss locale si ha: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E}$. Per introdurlo nell'eq. di continuità: $\text{div} \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{J} = - \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{introducendo l'espressione di div} \vec{J} \text{ con l'eq. di continuità nell'espressione } \text{div}(\vec{J} + \vec{X}) = 0 \Rightarrow$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le onde elettromagnetiche hanno origine da un sistema di cariche accelerate e producono un campo $E(x,y,z)$ e $B(x,y,z)$ correlati tra loro verso effetti manifestano in tempi minimi e a distanze sempre maggiori dalla sorgente.



Proprietà delle onde:

- \vec{E} e \vec{B} si propagano alla stessa velocità $\alpha = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Il modulo dei campi non dipende dalla velocità $B = \frac{E}{c}$
- \vec{E} e \vec{B} sono ortogonali tra di loro.
- Il verso del prodotto $\vec{E} \times \vec{B}$ definisce il verso di propagazione dato α , il vettore (vettore di propagazione): $\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{E} \times \vec{B}$ (Energie nell'unità di tempo)
- Le onde elettromagnetiche non si riflettono ma non interferiscono

EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

PDE del I° ordine: (DAGLI APPUNTI DI) 1.2
 MATEMATICA III

$$e_1 u_{x_1} + e_2 u_{x_2} + e u + d = \phi$$

Se e_1, e_2, e non delle funzioni di x_1, x_2 l'equazione è a coefficienti costanti, altrimenti è a coefficienti variabili.

PDE del II° ordine:

$$e_{11} u_{x_1 x_1} + e_{12} u_{x_1 x_2} + e_{22} u_{x_2 x_2} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + e u + d = \phi$$

se $b = \phi \Rightarrow$ equazione omogenea

se $b \neq \phi \Rightarrow$ equazione non omogenea.

Le PDE del II° ordine possono essere classificate in:

- ellittiche
- iperboliche
- paraboliche

Creando la matrice:

$$(e_{12} = e_{21})$$

$$A = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{e_{12}}{2} \\ \frac{e_{21}}{2} & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = e_{11}e_{22} - \frac{(e_{12})^2}{4}$$

A

se $|A| > 0$ la curva rappresenta un'ellisse e l'equazione è ellittica
 se $|A| = 0$ la curva rappresenta una parabola e l'equazione è parabolica
 se $|A| < 0$ la curva è un'iperbole e l'equazione è iperbolica

• L'equazione di Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = \phi$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 = \text{l'equazione è ellittica}$$

• L'equazione del calore: $u_t - u_{xx} = \phi$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{l'equazione è parabolica}$$

$$\text{Se } u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x_1, x_2)$$

Supponendo che le derivate di tale funzione siano continue, si possono calcolare le derivate:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, \quad p+q=m$$

che sono derivate possibili.

Un'equazione differenziale alle derivate possibili è un'equaz. del tipo:

$$f\left(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^p \partial x_2^q}\right) = \phi$$

L'ordine di un'equazione con derivate è definito dall'ordine massimo delle derivate possibili che compare.

• EQUAZIONE DELLA CORDA (O DELLE ONDE):

$$y_{tt} = c^2 y_{xx}$$

$$c^2 = \frac{\tau}{\mu}$$

Risolvendo tale equazione si ottiene il valore dello spostamento dell'incipine al tempo t .
 τ rappresenta la tensione della corda e μ la massa per unità di lunghezza.

• EQUAZIONE DEL CALORE:

$$u_t = k \Delta u \quad \rightarrow k \text{ è il coefficiente di diffusività}$$

dove $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ $u(x, y, z, t)$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ $\Delta u = \phi$ è l'equazione di Laplace quando la temperatura è costante
 $u_t = \phi \Rightarrow$ la temperatura non varia nel tempo.

• EQUAZIONE DI LAPLACE:

$$\nabla^2 u = \phi \quad \Delta u = \phi$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \phi$$

L'equazione di Laplace si ottiene anche ~~non~~ ottenendo prendendo $u_t = \phi$ nell'equaz. del calore.

• L'equazione delle onde (o delle onde):

2.1

$$u_{tt} - u_{xx} = \phi$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & \phi \\ \phi & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \angle \phi \Rightarrow \text{l'eq. è iperbolica}$$